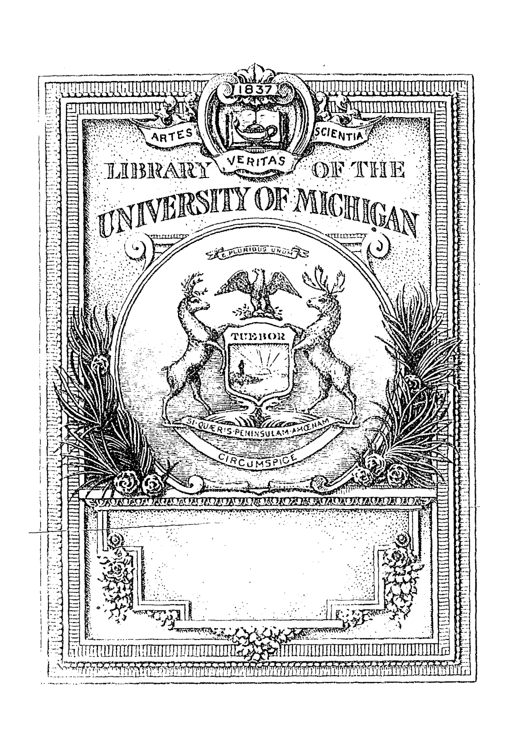
ABN8277
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B47709
035/2: : |a (CaOTULAS)160037453
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Vacquant, Charles, |d b. 1829.
245:00: |a Cours de trigonométrie à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires |b avec des compléments destinés aux élèves de mathématiques spéciales et indiqués dans le programme d'admission à l'École polytechnique pour 1886, |c par Ch. Vacquant, et A. Macé de Lépinay.
260: : |a Paris, |b G. Masson, |c 1886.
300/1: : |a 3 p. L., 401 p. |b incl. diagrs. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Trigonometry
700/1:1 : |a Macé de Lépinay, Auguste, |e joint author.
998: : |c RAS |s 9124


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

COURS
DE
TRIGONOMÉTRIE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

AVEC DES COMPLÉMENTS
DESTINÉS AUX ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

et indiqués dans le programme d'admission
à l'École polytechnique pour 1886

PAR

CH. VACQUANT
Ancien élève de l'École normale
Ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
Inspecteur général de l'Instruction publique

ET

A. MACÉ DE LÉPINAY
Ancien élève de l'École normale
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXVI

COURS

DE

TRIGONOMÉTRIE

AUTRES OUVRAGES DE M. VACQUANT

Cours de Géométrie, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux élèves de mathématiques spéciales (G. Masson, éd.). 1 vol. in-8 avec 769 fig. dans le texte. 8 fr.

Géométrie élémentaire, à l'usage des classes de lettres et de la classe de mathématiques préparatoires (G. Masson, éditeur), 2e éd. 1 vol. in-18, avec 391 figures dans le texte, cartonné..... 2 fr. 80

On vend séparément :

PREMIÈRE PARTIE. — *Géométrie plane* (classes de quatrième et de troisième). 1 vol. in-18, avec figures, cartonné........ 1 fr. 75

DEUXIÈME PARTIE. — *Géométrie dans l'espace* (classes de seconde et de rhétorique). 1 vol. in-18, avec figures, cartonné..... 1 fr. 50

Précis de trigonométrie, 6e édition. 1 vol. in-18......... 1 fr. 20

Principes d'Algèbre, à l'usage des élèves de l'enseignement spécial, 9e édit., 1884 (Ch. Delagrave, édit.).

PREMIÈRE PARTIE. — *Cours de 2me année*, in-12 cartonné. 1 fr. 25

DEUXIÈME PARTIE. — *Cours de 3me année*, in-12 cartonné. 2 fr. »

Éléments d'Algèbre, à l'usage des classes de lettres et de la classe de mathématiques préparatoires, 5e édition, 1884 (Ch. Delagrave, éditeur).. 3 fr.

On vend séparément :

PREMIÈRE PARTIE. — *Classe de troisième*.................... 1 fr.

DEUXIÈME PARTIE. — *Classe de seconde et de philosophie*.... 2 fr.

Leçons d'Algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement. 1 vol. in-8o, 5e édition, 1885 (Ch. Delagrave, éd.)................. 5 fr.

3541-85. — Corbeil. Typ. et stér. Crété.

COURS

DE

TRIGONOMÉTRIE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

AVEC DES COMPLÉMENTS
DESTINÉS AUX ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

**et indiqués dans le programme d'admission
à l'École polytechnique pour 1886**

PAR

CH. VACQUANT
Ancien élève de l'École normale
Ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
Inspecteur général de l'Instruction publique

ET

A. MACÉ DE LÉPINAY
Ancien élève de l'École normale
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXVI

EXTRAIT

DU

PROGRAMME D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

POUR 1886.

TRIGONOMÉTRIE.

Fonctions circulaires. — Arcs correspondant à une fonction circulaire donnée.

Théorie des projections.

Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc. — Formules relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division des arcs. — Manière de rendre les formules calculables par logarithmes.

Usage des tables.

Limite du rapport de l'arc au sinus ou à la tangente lorsque l'arc tend vers zéro. — La différence entre un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et son sinus est moindre que le sixième du cube de l'arc.

Formules relatives aux triangles rectangles ou quelconques.

Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré et de l'équation binôme.

Propriétés des triangles sphériques.

Relation entre les trois côtés et un angle d'un triangle sphérique. — Proportion des sinus. — Résolution des triangles rectangles.

COURS

DE

TRIGONOMÉTRIE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

ANGLES ET ARCS.

1. **Mesure des angles.** On démontre, en géométrie élémentaire (Cours de géométrie élémentaire, n° 181), que, *si des sommets de deux angles comme centres, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre leurs côtés.* Si donc du sommet O commun à deux angles AOB et MON, comme centre, on décrit une circonférence de rayon quelconque, et si AB et MN sont les arcs interceptés sur la circonférence et compris respectivement entre les côtés de ces angles (*fig.* 1), on a la relation :

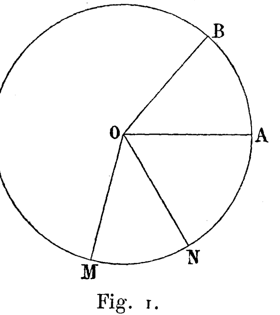


Fig. 1.

$$\frac{\text{angle AOB}}{\text{angle MON}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc MN}}.$$

De ce que le rapport $\frac{\text{arc AB}}{\text{arc MN}}$ est égal au rapport $\frac{\text{angle AOB}}{\text{angle MON}}$, il résulte que ce rapport est indépendant du rayon de la circonférence décrite du sommet commun comme centre.

On conclut encore que, si l'on prend pour unité d'arc, sur cette circonférence de rayon quelconque, l'arc MN, et si l'on prend pour unité d'angle l'angle au centre MON correspondant à cette unité d'arc, l'arc AB de cette circonférence et l'angle correspondant AOB ont la même mesure.

La recherche de la mesure d'un angle est alors ramenée à la recherche de la mesure de l'arc intercepté par les côtés de l'angle sur une circonférence de rayon *quelconque* ayant son centre au sommet de l'angle.

2. **Arc et angle d'un degré.** Ordinairement, en géométrie, on prend pour unité d'arc, sur une circonférence quelconque, la 360[e] partie de cette circonférence, et cette partie de la circonférence est appelée *arc d'un degré.*

On prend alors pour unité d'angle l'angle au centre correspondant et on l'appelle *angle d'un degré.* A un arc d'un certain nombre de degrés, correspond ainsi un angle du même nombre de degrés.

On partage l'arc d'un degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*, et l'arc d'une minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes.* A un arc d'une minute correspond un angle au centre qu'on appelle *angle d'une minute;* à un arc d'une seconde correspond un angle au centre qu'on appelle *angle d'une seconde.*

A un arc de 54 degrés, 25 minutes, 47 secondes, correspond un angle au centre de 54 degrés, 25 minutes, 47 secondes, et l'on écrit, pour abréger, cet arc ou cet angle sous la forme :

$$54^\circ\, 25'\, 47''.$$

3. **Mesure d'un arc en parties du rayon.** Au lieu de prendre pour unité d'arc une partie aliquote de la circonférence, on peut prendre un arc dont la longueur soit dans un rapport simple avec la longueur du rayon, par exemple un arc de longueur égale à la longueur du rayon. L'unité d'angle sera l'angle au centre correspondant. De cette façon, la mesure d'un angle AOB est le nombre qui représente la longueur de l'arc AB intercepté par les côtés de l'angle sur une circonférence de centre O, quand on prend le rayon OA de cette circonférence pour unité.



Par exemple, si l'arc AB est mesuré par le nombre $\frac{11}{5}$, c'est-à-dire si la longueur de l'arc AB est les $\frac{11}{5}$ de la longueur du rayon, l'angle AOB est aussi mesuré par le nombre $\frac{11}{5}$, c'est-à-dire qu'il contient les $\frac{11}{5}$ de l'angle choisi pour unité d'angle.

Il est d'ailleurs facile de passer de la mesure d'un arc évalué en degrés à la mesure du même arc évalué en parties du rayon, c'est-à-dire au nombre qui représente la longueur de cet arc, quand on prend le rayon pour unité de longueur. En effet, si l'on prend le rayon d'une circonférence pour unité de longueur, la longueur de la circonférence est mesurée par le nombre 2π, et la longueur de la demi-circonférence par le nombre π. D'autre part, la demi-circonférence contenant 180 degrés, la longueur d'un arc d'un degré est mesurée par le nombre $\frac{\pi}{180}$. Donc, si, prenant toujours le rayon pour unité de longueur, nous appelons l la mesure de la longueur de l'arc qui contient n degrés, nous aurons :

$$l = \frac{n\pi}{180},$$

formule qui résout la transformation proposée.

Inversement, on déduit de cette formule :

$$n = \frac{180l}{\pi},$$

formule qui permet de convertir en degrés un arc évalué en parties du rayon.

4. **Application.** Exprimer en degrés, minutes et secondes, un arc dont la longueur est égale au rayon.

Dans ce cas, $l = 1$, donc :

$$n = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{648000''}{\pi}.$$

Si on veut évaluer n à $0'',01$ près, il faut prendre π avec

huit décimales exactes et on a :

$$n = 206264'',81,$$

ou $57^\circ\ 17'\ 44'',81$, à $0'',01$ près. Donc, l'arc dont la longueur est égale au rayon vaut :

$$57^\circ\ 17'\ 44'',81.$$

5. Remarque. En trigonométrie, nous prendrons pour unité d'arc tantôt l'une, tantôt l'autre des unités précédentes; dans le premier cas, l'angle sera évalué en degrés, minutes et secondes; dans le second cas, il sera mesuré par un nombre, rapport de la longueur de l'arc correspondant à un angle au centre égal à l'angle donné, au rayon de la circonférence; il conviendra, dans ce dernier cas, de prendre le rayon de la circonférence égal à l'unité de longueur.

Dans l'étude des fonctions circulaires (18), nous prendrons pour unité d'arc l'arc de longueur égale à l'unité de longueur, sur une circonférence de cercle de rayon 1, que l'on nomme le *cercle trigonométrique*. Dans la résolution des triangles, nous prendrons pour unité d'arc le degré et nous évaluerons les angles en degrés, minutes et secondes.

6. Arcs positifs, arcs négatifs, angles positifs, angles négatifs. Sur une circonférence de rayon 1, marquons un point fixe A (*fig.* 2), que l'on appelle l'origine des arcs, et imaginons un mobile M se mouvant sur la circonférence de droite à gauche, pour un observateur placé à l'intérieur de cette circonférence, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. L'arc AM parcouru par le mobile est une grandeur variable, qui est nulle quand le point M est en A, qui croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand le point M parcourt le premier quadrant AB de la circonférence, de $\frac{\pi}{2}$ à π quand le point M par-

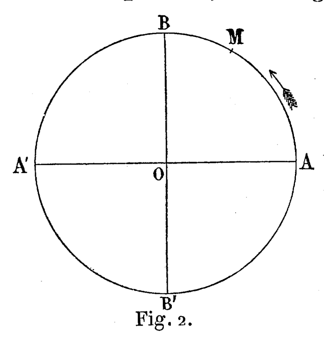


Fig. 2.

court le deuxième quadrant BA′, de π à $\frac{3\pi}{2}$ quand le point M parcourt le troisième quadrant A′B′, et enfin de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π quand le point M parcourt le quatrième quadrant B′A, et revient en A, après avoir ainsi fait le tour de la circonférence.

Si l'on imagine que le mobile fasse une seconde fois le tour de la circonférence, l'arc parcouru continue à croître de 2π à 4π; si le mobile fait une troisième fois le tour de la circonférence, l'arc parcouru continue à croître de 4π à 6π, et ainsi de suite, de sorte que l'arc parcouru par le mobile est une grandeur variable qui peut croître de zéro à l'infini.

7. Si le mobile, au lieu de parcourir la circonférence dans le sens ABA′...., se meut dans le sens opposé AB′A′.., on regarde l'arc parcouru comme négatif. Alors, à mesure que le point M s'éloigne du point A, l'arc parcouru diminue; il devient égal à $-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$, et à -2π, quand le mobile arrive aux points B′,A′,B, et revient au point A.

Le mobile continuant à se mouvoir sur la circonférence, dans le même sens, l'arc continue à décroître de -2π à -4π, de -4π à -6π, et ainsi de suite, et par conséquent l'arc peut décroître ainsi de zéro à moins l'infini.

Nous regarderons donc l'arc comme une grandeur variable qui peut croître de $-\infty$ à $+\infty$.

8. Deux arcs qui ont même origine A et même extrémité M ne peuvent différer que par un multiple de 2π.

Si donc α est l'un des arcs terminés en M, tous les arcs terminés en M seront compris dans la formule

$$x = 2k\pi + \alpha,$$

x étant l'un quelconque de ces arcs, et k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

9. Pendant que le point M parcourt la circonférence dans le sens ABA′....., le rayon OM tourne autour du point O, et engendre l'angle variable AOM (*fig.* 3). Cet angle n'est pas assujetti à être moindre que deux angles droits; il peut même

recouvrir plusieurs fois le plan, et surpasser ainsi quatre angles droits.

Quand le point M revient au point A, l'angle AOM devient égal à 4 angles droits; quand le point M fait une seconde fois, puis une troisième fois, le tour de la circonférence, l'angle AOM croît de 4 droits à 8 droits, puis de 8 droits à 12 droits, et ainsi de suite; de sorte que l'angle peut croître de zéro à l'infini.

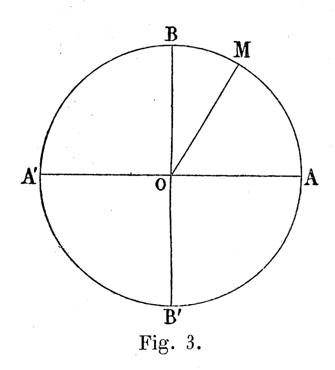


Fig. 3.

Si le point M se meut sur la circonférence en sens contraire, l'angle engendré par le rayon OM est regardé comme négatif, et décroît de zéro à moins l'infini.

L'angle, ainsi que l'arc, peut donc être regardé comme une grandeur variable qui peut croître de $-\infty$ à $+\infty$.

10. **Arcs complémentaires**. On dit que deux arcs sont *complémentaires* quand leur somme algébrique est égale à $\frac{\pi}{2}$. Le complément d'un arc x est $\frac{\pi}{2} - x$. L'arc positif AM, moindre que $\frac{\pi}{2}$, a pour complément BM (*fig.* 4); l'arc positif ABM', plus grand que $\frac{\pi}{2}$, a pour complément l'arc négatif — BM'.

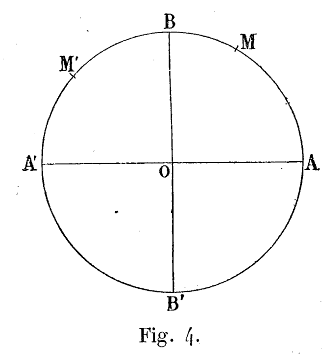


Fig. 4.

Sur le cercle trigonométrique, à partir du point A, prenons dans le sens positif un arc égal à $\frac{\pi}{2}$; soit B l'extrémité de cet arc. On convient de prendre pour origine du complément d'un arc donné x, le point B, et de compter positivement ce complément dans le sens BA, et négativement dans le sens opposé, de sorte que le sens positif d'un arc donné est opposé, sur le

cercle trigonométrique, au sens positif de son complément. Grâce à cette convention, un arc quelconque x et son complément $\frac{\pi}{2} - x$ ont la même extrémité. En effet, soit M l'extrémité de l'arc x. Considérons un mobile partant de B, et faisons-lui parcourir un arc égal, en grandeur et en signe, au complément $\frac{\pi}{2} - x$ de l'arc x. Ce mobile parcourra d'abord, dans le sens BA, l'arc $\frac{\pi}{2}$, ce qui l'amènera en A, puis il lui restera à parcourir l'arc $-x$, c'est-à-dire à faire le même chemin que le mobile qui, parti du point A, a parcouru l'arc x; le mobile arrivera donc au même point M.

Donc le complément d'un arc qui a le point A pour origine et le point M pour extrémité est un arc qui a pour origine le point B et pour extrémité le même point M.

11. **Arcs supplémentaires.** On dit que deux arcs sont *supplémentaires* lorsque leur somme algébrique est égale à π. Le supplément d'un arc x est $\pi - x$.

Sur le cercle trigonométrique, prenons, à partir du point A, dans le sens positif, un arc ABA égal à π; soit A′ l'extrémité de cet arc, extrémité qui est symétrique du point A par rapport au centre (*fig.* 5). On convient de prendre pour origine du supplément d'un arc donné x le point A′, et de compter positivement ce supplément dans le sens A′BA, et négativement dans le sens opposé, de sorte que le sens positif d'un arc donné est opposé, sur le cercle trigonométrique, au sens positif de son supplément. Grâce à cette convention, un arc quelconque x et son supplément $\pi - x$ ont la même extrémité. En effet, soit M l'extrémité de l'arc x; considérons un mobile partant du point A′ et faisons-lui parcourir un arc égal en grandeur et en signe au supplément $\pi - x$ de l'arc x; ce mo-

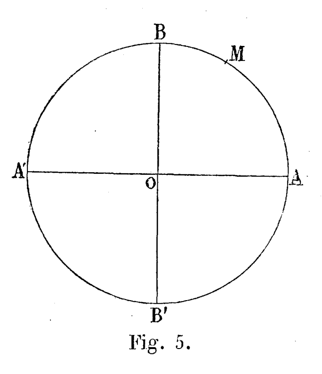


Fig. 5.

bile parcourra d'abord dans le sens A′BA l'arc π, ce qui l'amènera en A; puis il lui restera à parcourir l'arc $-x$, c'est-à-dire à faire le même chemin que le mobile qui, parti du point A, a parcouru l'arc x; le mobile arrivera donc au même point M. Donc, le supplément d'un arc qui a le point A pour origine et le point M pour extrémité, est un arc qui a pour origine le point A′ et pour extrémité le même point M.

12. **Remarque.** Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique (*fig.* 6), et soient M′, M″, M‴, les points symétriques du point M, par rapport au diamètre AA′ mené par l'origine A des arcs, par rapport au diamètre BB′ perpendiculaire à AA′, et par rapport au centre O du cercle. Soit α un quelconque des arcs, d'origine A, terminés en M. On voit immédiatement sur la figure que, si la lettre k désigne un nombre entier qui peut être quelconque, positif ou négatif:

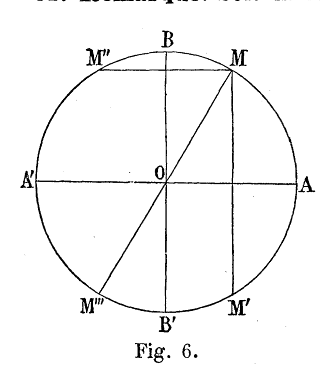


Fig. 6.

1° Tous les arcs, d'origine A, terminés en M, sont compris dans la formule

$$x = 2k\pi + \alpha;$$

2° Tous les arcs, d'origine A, terminés en M′, sont compris dans la formule

$$x' = 2k\pi - \alpha;$$

3° Tous les arcs, d'origine A, terminés en M″, sont compris dans la formule

$$x'' = (2k+1)\pi - \alpha;$$

4° Tous les arcs, d'origine A, terminés en M‴, sont compris dans la formule

$$x''' = (2k+1)\pi + \alpha.$$

CHAPITRE I

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

§ I. Définition des lignes trigonométriques. — § II. Variations des lignes trigonométriques. — § III. Relations entre les lignes trigonométriques de certains arcs qui satisfont à des conditions particulières données. — § IV. Fonctions circulaires inverses. — § V. Relations fondamentales entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

§ I. — Définition des lignes trigonométriques.

13. Considérons le cercle trigonométrique, c'est-à-dire un cercle dont nous prendrons le rayon pour unité de longueur; soit A l'origine des arcs (*fig.* 7), menons le diamètre AA′, le diamètre perpendiculaire BB′, et soit B celle de ses deux extrémités qui est telle que l'arc AB soit égal à $\frac{\pi}{2}$. Soit M l'extrémité d'un arc x dont l'origine est A.

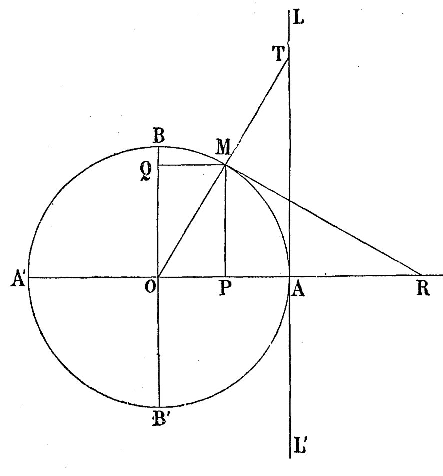


Fig. 7.

On appelle *lignes trigonométriques* de cet arc, et de l'angle au centre correspondant, certaines lignes que nous allons définir et dont la grandeur et le signe dépendent de la position du point M.

14. **Sinus**. On appelle *sinus* d'un arc x terminé en M, la portion OQ du diamètre BB′ comprise entre le centre O et le

pied Q de la perpendiculaire abaissée de M sur BB′, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de O vers Q on marche sur le diamètre BB′, dans le sens OB, ou dans le sens opposé OB′ (*fig.* 7).

Si du point M on abaisse la perpendiculaire MP sur AA′, on remarque que les deux droites PM et OQ sont égales, parallèles et de même sens; on peut donc dire que le sinus d'un arc x terminé en M est la portion PM de la perpendiculaire abaissée de M sur le diamètre AA′, comprise entre le pied P de cette perpendiculaire sur AA′ et le point M, affectée du signe + ou du signe —, suivant que le point M est, par rapport à AA′, du même côté que le point B, ou du côté opposé.

15. **Tangente.** On appelle *tangente* d'un arc terminé en M, la portion AT de la tangente LL′ au cercle au point A, comprise entre le point A et le rayon OM, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de A vers T on se déplace sur L′L dans le sens OB ou dans le sens opposé OB′.

16. **Sécante.** On appelle *sécante* d'un arc terminé en M, la portion OR du diamètre AA′ comprise entre le point O et la tangente au cercle au point M, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de O vers R on se déplace sur A′A dans le sens OA ou dans le sens opposé OA′.

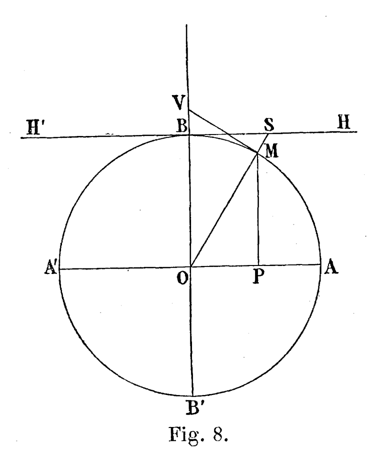


Fig. 8.

17. **Lignes complémentaires : cosinus, cotangente, cosécante.** On appelle *cosinus*, *cotangente*, *cosécante* d'un arc x, le sinus, la tangente, la sécante du complément $\frac{\pi}{2} - x$ de cet arc.

L'origine des compléments étant B, et BA étant le sens positif des compléments (*fig.* 8), on voit que :

Le *cosinus* d'un arc ayant son origine en A et son extrémité en M est la portion du diamètre AA′ comprise entre le point O

et le pied P de la perpendiculaire abaissée de M sur AA′, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de O vers P on marche sur A′A dans le sens OA ou dans le sens opposé OA′.

La *cotangente* d'un arc ayant son origine en A et son extrémité en M est la portion BS de la tangente HH′ au cercle au point B, comprise entre le point B et le rayon OM, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de B vers S on se déplace sur H′H dans le sens OA ou dans le sens opposé OA′.

La *cosécante* d'un arc ayant son origine en A et son extrémité en M est la portion OV du diamètre B′B comprise entre le point O et la tangente au cercle au point M, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de O vers V on marche sur B′B dans le sens OB ou dans le sens opposé OB′.

Nous représenterons, pour abréger l'écriture, les lignes trigonométriques d'un arc x par les notations

$$\sin x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{séc} x,\quad \cos x,\quad \cot x,\quad \operatorname{coséc} x.$$

Il ne faut pas oublier que le rayon du cercle trigonométrique est pris pour unité de longueur, de sorte que la mesure d'une ligne trigonométrique est le rapport de cette ligne trigonométrique au rayon de la circonférence considérée.

18. Les six lignes trigonométriques d'un arc x varient quand l'arc x varie ; ce sont des fonctions différentes de cet arc ; on leur donne le nom commun de *fonctions circulaires*.

La *trigonométrie* a pour objet l'étude des propriétés des fonctions circulaires et leur application à la résolution des triangles.

Nous allons examiner successivement comment varie chacune des lignes trigonométriques d'un arc quand on fait varier cet arc.

§ II. — Variations des lignes trigonométriques.

VARIATIONS DU SINUS.

19. Si le point M se déplace sur la circonférence de A vers B,



c'est-à-dire si l'arc x croît de o à $\frac{\pi}{2}$, le sinus est positif et croît de o à 1 (*fig.* 9); si le point M, continuant à se mouvoir sur la circonférence, va de B en A′, c'est-à-dire si l'arc croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, le sinus est positif et décroît de 1 à o. Si le mobile dépasse le point A′, et va de A′ en B′, c'est-à-dire si l'arc croît de π à $\frac{3\pi}{2}$, le sinus devient négatif et décroît de o à — 1 ; si le mobile dépasse le point B′ et revient au point A, c'est-à-dire si l'arc croît de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, le sinus reste négatif et croît de — 1 à o.

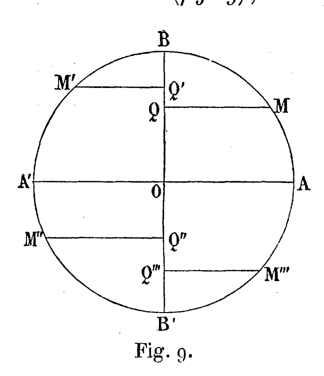


Fig. 9.

Le résultat de la discussion est résumé dans le tableau suivant que l'on appelle le tableau des variations de la fonction :

x	o		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	o	croît	+ 1	décroît	o	décroît	— 1	croît	o

On voit donc que, l'arc croissant de o à 2π, le sinus passe deux fois, et deux fois seulement, par toute valeur comprise entre — 1 et + 1, qu'il atteint sa valeur maximum qui est + 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$, et sa valeur minimum qui est — 1 pour $x = \frac{3\pi}{2}$.

Si, après avoir parcouru la circonférence entière, le mobile continue à se mouvoir dans le même sens, le sinus reprend les mêmes valeurs dans le même ordre, quand le mobile repasse par les mêmes points de la circonférence. Donc, si l'on fait croître x de 2π à 4π, de 4π à 6π, etc., le sinus repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de o à 2π. Il en sera de même si l'on fait croître x de -2π à o, de -4π à -2π, de -6π à -4π, etc. ; le mobile décrira à chaque fois la circonférence ABA′B′, et les mêmes valeurs du sinus se reproduiront encore.

20. On dit qu'une fonction $f(x)$ d'une variable x est *fonction périodique* de cette variable, lorsque, x étant une valeur tout à fait quelconque attribuée à la variable, la fonction reprend la même valeur quand on augmente x d'une quantité fixe déterminée ω ; on appelle amplitude de la période ou simplement la période, la plus petite valeur de la constante ω qui, ajoutée à x, n'altère pas la valeur de la fonction ; on aura donc, quelle que soit la valeur attribuée à x,

$$f(x) = f(x + \omega).$$

Dès lors, on aura aussi

$$f(x+\omega) = f(x+2\omega), \qquad f(x+2\omega) = f(x+3\omega), \; \ldots\ldots\ldots,$$
$$f(x-\omega) = f(x), \qquad f(x-2\omega) = f(x-\omega), \; \ldots\ldots\ldots;$$

on a donc, d'une manière générale, si $f(x)$ est une fonction périodique de x, dont la période est ω,

$$f(x) = f(x + k\omega),$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

21. Le sinus d'un arc x ne change pas, comme on vient de le voir, lorsqu'on change x en $x + 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, de sorte que l'on a

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi).$$

D'ailleurs 2π est le plus petit arc constant qui puisse être ajouté à x sans changer la valeur de $\sin x$. En effet, soit M l'extrémité de l'arc x (*fig.* 10) ; les seuls arcs qui ont leur sinus égal à $\sin x$ sont ceux qui sont terminés en M et ceux qui sont terminés au point M′ symétrique de M par rapport à BB′. Deux arcs terminés, l'un en M, l'autre en M′, diffèrent d'un arc dont la grandeur dépend de la position du point M sur le cercle trigonométrique, et par conséquent de la grandeur de l'arc x. Deux arcs distincts

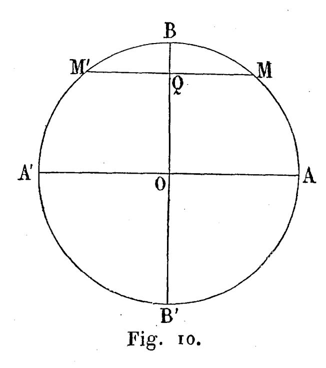


Fig. 10.

terminés au même point M diffèrent d'un multiple de 2π, et leur plus petite différence possible est 2π. Donc le plus petit arc constant qui peut être ajouté à un arc x sans altérer le sinus de cet arc est 2π. Donc *sin x est une fonction périodique de l'arc x, et l'amplitude de la période est* 2π.

22. On peut, à l'aide d'une figure, rendre en quelque sorte visible la marche des valeurs que prend la fonction $\sin x$, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable x dont on peut suivre la marche des valeurs, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$; on pose :

$$y = f(x);$$

on trace dans un plan deux droites rectangulaires $x'x$, $y'y$ qui se coupent au point O (*fig.* 11). On fait choix d'une unité de longueur ; puis on représente chaque valeur numérique positive ou négative attribuée à x par une longueur portée, à partir du point O sur la droite $x'x$; on convient de porter cette longueur dans le sens Ox quand la valeur attribuée à x est positive, et dans le sens Ox' quand cette valeur est négative. A une valeur particulière attribuée à x, représentée en grandeur et en sens par OP, correspond pour y une valeur déterminée ; pour représenter cette valeur, on mène par le point P une parallèle à la droite $y'y$, et, sur cette parallèle, on porte dans le sens Oy, ou dans le sens Oy', selon que la valeur de y est positive ou négative, une longueur PM égale à la valeur absolue de y. De cette façon, à chaque valeur attribuée à x, on fait correspondre un certain point M. Les quantités x et y qui fixent la position du point M sont les *coordonnées* de ce point ; la valeur de x est l'*abscisse* du point, la valeur de y en est l'*ordonnée ;* $x'x$ et $y'y$ sont les *axes* des coordonnées, O est l'*origine* des coordonnées. Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, le point M parcourt une certaine ligne, et cette ligne peut être regardée comme la représenta-

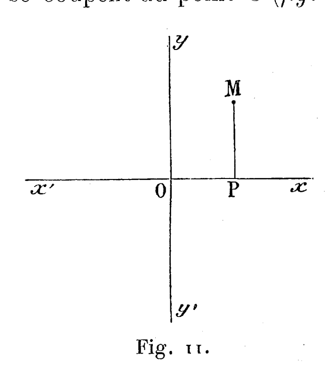


Fig. 11.

tion géométrique de la marche des valeurs de la fonction $f(x)$.

Ces notions préliminaires étant établies, traçons deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 12), et posons :

$$y = \sin x.$$

Le tableau de discussion du n° 19 nous montre que, si x croît de o à 2π, nous obtiendrons un arc de courbe OABCD, partant du point O, coupant l'axe des x aux points B et D dont les abscisses sont π et 2π, et tel que l'arc OAB est situé au-dessus de Ox, l'arc BCD au-dessous. D'ailleurs la discussion faite dans le même numéro montre que la fonction $\sin x$ se reproduit périodiquement, quand on augmente ou quand on diminue x d'un multiple quelconque de 2π; on obtient donc une courbe indéfinie formée d'une infinité d'arcs identiques à l'arc OABCD, placés les uns à la suite des autres, et que l'on nomme la sinussoïde.

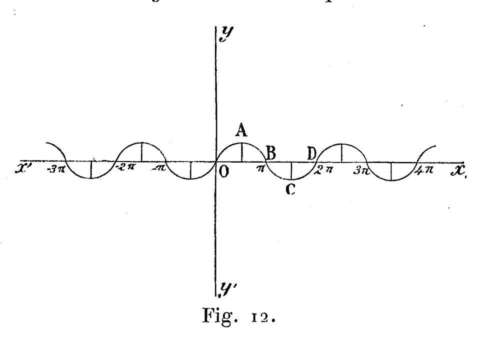


Fig. 12.

VARIATIONS DE LA TANGENTE.

23. Si le point mobile M se déplace sur la circonférence de A vers B, c'est-à-dire si l'arc x croît de o à $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 13), la tangente est positive, croît à partir de o et devient plus grande que toute quantité donnée lorsque x se rapproche de plus en plus de $\frac{\pi}{2}$; on dit qu'elle devient infinie. Si le point M dépasse le

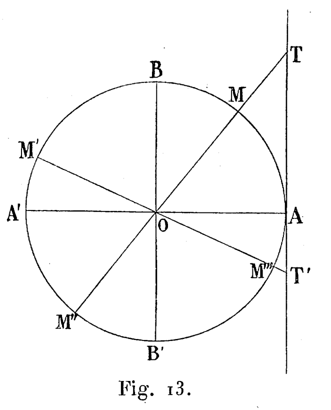


Fig. 13.

point B, c'est-à-dire si l'arc x dépasse la valeur $\frac{\pi}{2}$, la tangente, qui était positive, devient négative et infiniment grande en valeur absolue; elle passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, et on dit que $\operatorname{tg} x$ est fonction discontinue de x pour la valeur $x=\frac{\pi}{2}$. Si le mobile, continuant à se mouvoir sur la circonférence, va de B en A', c'est-à-dire si l'arc x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente est négative et croît de $-\infty$ à o.

On voit donc que, l'arc croissant de o à π, la tangente prend toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$, et ne prend qu'une fois chacune d'elles.

Le résultat de la discussion est résumé dans le tableau :

x	o	croît	$\frac{\pi}{2}$		croît	π
$\operatorname{tg} x$	o	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	o

Si le mobile, continuant à se déplacer sur la circonférence, parcourt l'arc A'B'A, c'est-à-dire si l'arc croît de π à 2π, la tangente reprend les mêmes valeurs dans le même ordre et est discontinue pour $x=\frac{3\pi}{2}$, valeur telle que si x traverse en croissant la valeur $\frac{3\pi}{2}$, la tangente passe brusquement de de $+\infty$ à $-\infty$.

Si, après avoir fait croître x de o à 2π, on le fait croître de 2π à 3π, de 3π à 4π, etc., la tangente repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de o à π; il en sera de même si l'on fait croître x de $-\pi$ à o, de -2π à $-\pi$, de -3π à -2π, etc.

24. Comme deux arcs, de même origine A, terminés soit au même point, soit en deux points diamétralement opposés, ont la même tangente, on a

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+k\pi),$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et par conséquent la tangente est une fonction périodique de l'arc.

D'ailleurs π est le plus petit arc constant que l'on puisse ajouter à x sans altérer la valeur de $\operatorname{tg} x$; car deux arcs, de même origine A, qui ont la même tangente AT, sont terminés aux deux extrémités du diamètre qui contient le point T ; donc $\operatorname{tg} x$ *est une fonction périodique de l'arc x et l'amplitude de la période est* π.

25. On peut représenter par une courbe la variation de $\operatorname{tg} x$; traçons à cet effet deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 14) et posons

$$y = \operatorname{tg} x.$$

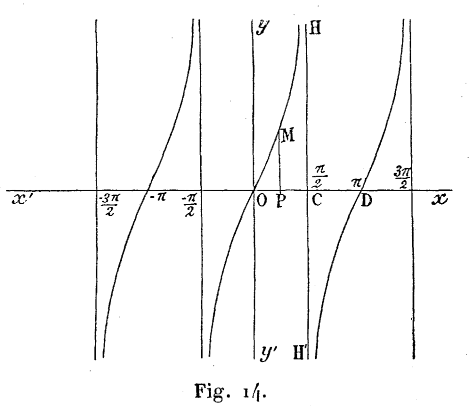


Fig. 14.

Faisons croître x d'une manière continue d'abord de 0 à $\frac{\pi}{2}$; menons par le point C, tel que $OC = \frac{\pi}{2}$, une parallèle H'CH à Oy. Si x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le point M décrira une branche de courbe partant de O, au-dessus de Ox, s'élevant indéfiniment au-dessus de Ox, située toujours à gauche de H'CH, et s'en rapprochant indéfiniment, lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$; on dit que la droite H'CH est *asymptote* à la branche de courbe. Si nous faisons ensuite croître x d'une manière continue de $\frac{\pi}{2}$ à π, le point M décrira une branche de courbe située entièrement au-dessous de Ox, partant très loin au-dessous de Ox, mais très près de la droite H'CH lorsque x part de $\frac{\pi}{2}$, et arrivant enfin au point D de Ox tel que $OD = \pi$.

La tangente étant fonction périodique de l'arc et sa période étant π, si on augmente ou si on diminue x d'un multiple quelconque de π, on reproduira périodiquement les mêmes

branches de courbes et la variation de la fonction $y = \operatorname{tg} x$, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, sera représentée par la figure 14.

VARIATIONS DE LA SÉCANTE.

26. Si le point M se déplace sur la circonférence de A en B, c'est-à-dire si l'arc x croît de o à $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 15), la sécante est positive et croît de $+1$ à $+\infty$. Si le point M dépasse le point B,

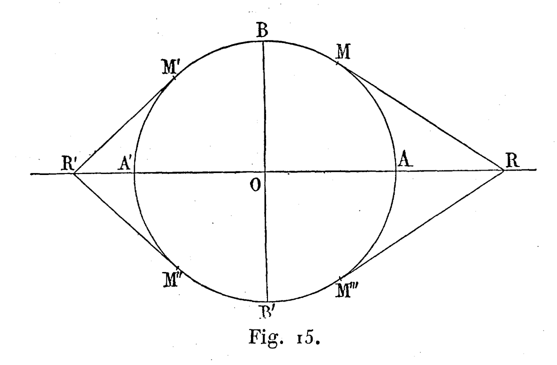


Fig. 15.

la sécante, qui était positive, devient négative et infiniment grande en valeur absolue; elle passe brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque x traverse, en croissant, la valeur $\frac{\pi}{2}$; elle est donc discontinue pour cette valeur attribuée à x. Si le point M, continuant à se mouvoir sur la circonférence, va de B en A', c'est-à-dire si l'arc croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, la sécante est négative et croît de $-\infty$ à -1. Si le mobile dépasse le point A' et va de A' en B', c'est-à-dire si l'arc croît de π à $\frac{3\pi}{2}$, la sécante reste négative et décroît de -1 à $-\infty$. Si le mobile dépasse le point B', la sécante passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, et si le mobile marche de B' en A, la sécante décroît de $+\infty$ à $+1$.

On voit donc que, l'arc croissant de o à 2π, la sécante est continue pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle, sauf pour $x = \frac{\pi}{2}$ et pour $x = \frac{3\pi}{2}$, qu'elle prend deux fois

toute valeur comprise entre $+1$ et $+\infty$, ou entre $-\infty$ et -1, mais qu'elle ne prend aucune valeur comprise entre -1 et $+1$.

La discussion précédente est résumée dans le tableau suivant :

x	0	croît	$\frac{\pi}{2}$		croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$		croît	2π
séc x	$+1$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	-1	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	$+1$

Si, après avoir fait croître x de 0 à 2π, on le fait croître de 2π à 4π, de 4π à 6π, etc., la sécante repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de 0 à 2π; il en sera de même si l'on fait croître x de -2π à 0, de -4π à -2π, de -6π à -4π, etc.

27. Deux arcs de même origine A, terminés au même point du cercle, ayant la même sécante, on a :

$$\text{séc}\, x = \text{séc}\,(x + 2k\pi),$$

k désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,

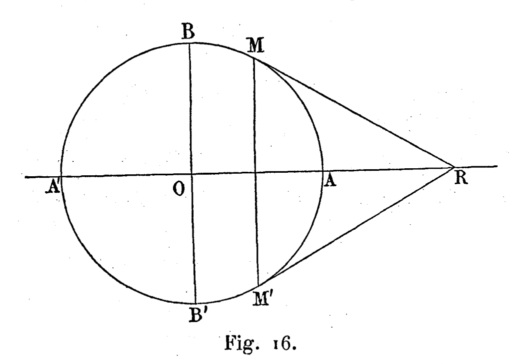


Fig. 16.

et par conséquent la sécante est une fonction périodique de l'arc. D'ailleurs 2π est le plus petit arc constant qui peut être ajouté à x sans altérer la valeur de séc x. En effet, soit M l'extrémité de l'arc x (*fig.* 16); les seuls arcs qui ont leur sécante égale à séc x sont ceux qui sont terminés en M et ceux qui sont terminés au point M' symétrique de M par rapport à AA'. Deux arcs terminés, l'un en M, l'autre en M', diffèrent d'un arc dont

la grandeur dépend de la position du point M sur le cercle trigonométrique et par suite de la grandeur de l'arc x. Deux arcs distincts terminés au même point M diffèrent d'un multiple de 2π, et leur plus petite différence possible est 2π; le plus petit arc constant qui peut être ajouté à un arc x sans altérer la sécante de cet arc est donc 2π; par suite *séc x est une fonction périodique de l'arc x et l'amplitude de la période est* 2π.

28. On peut représenter par une courbe la variation de séc x. Traçons comme précédemment (*fig.* 17) deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et posons :

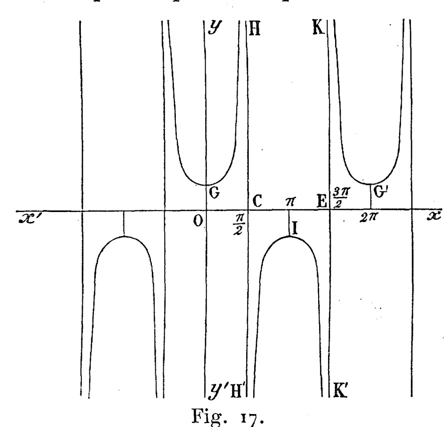


Fig. 17.

$$y = \text{séc}\, x.$$

Si x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on aura une branche de courbe qui part d'un point G situé sur Oy tel que $OG = 1$, qui s'éloigne à la fois de Ox et de Oy et qui est asymptote du côté des y positifs à la parallèle H'CH à Oy menée par le point C tel que $OC = \frac{\pi}{2}$. Si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, on obtiendra une branche de courbe située entièrement au-dessous de Ox. Cette branche asymptote à la droite H'CH du côté des y négatifs va d'abord en s'éloignant de Oy et en se rapprochant de Ox, vient passer par le point I correspondant à $x = \pi$, $y = -1$, puis s'éloigne de Ox en même temps que de Oy, et devient asymptote du côté des y négatifs à la parallèle K'EK à Oy menée à la distance $\frac{3\pi}{2}$ de cet axe. Enfin si x croît de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, on obtiendra une branche de courbe située au-dessus de Ox, asymptote à la droite K'EK du côté des y positifs, s'é-

loignant de Oy en se rapprochant de Ox et venant enfin aboutir au point G' défini par $x = 2\pi$ et $y = 1$.

La sécante étant fonction périodique de l'arc, de période 2π, si l'on augmente, ou si l'on diminue, x d'un multiple quelconque de 2π, on reproduira périodiquement les mêmes branches de courbe, et la variation de la fonction $y = \text{séc}\, x$, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, sera représentée par la figure 17.

VARIATIONS DU COSINUS.

29. Si le point M, extrémité d'un arc dont l'origine est A, se déplace sur la circonférence de A en B, c'est-à-dire si l'arc x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 18), d'après la définition du cosinus (17), le cosinus est positif, part de 1 et décroît de cette valeur à 0. Si le point M dépasse le point B, le cosinus devient négatif, et si le point M va de B en A', c'est-à-dire si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, le cosinus est négatif et décroît de 0 à -1. Si le point mobile M va de A' en B', c'est-à-dire si x croît de π à $\frac{3\pi}{2}$, le cosinus reste négatif, mais croît de -1 à 0. Enfin si le point M dépasse B', le cosinus redevient positif, et si le mobile va de B' en A, c'est-à-dire si x croît de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, le cosinus est positif et croît de 0 à 1.

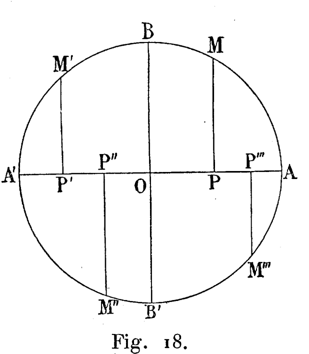


Fig. 18.

Le résultat de la discussion est résumé dans le tableau suivant :

x	0	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	2π
$\cos x$	$+1$	décroît	0	décroît	-1	croît	0	croît	$+1$

On voit donc que si l'arc croît de 0 à 2π, le cosinus passe deux fois, et deux fois seulement, par toute valeur comprise

entre -1 et $+1$, qu'il prend sa valeur maximum qui est $+1$ pour $x=0$ et pour $x=2\pi$, et sa valeur minimum qui est -1 pour $x=\pi$.

Si, après avoir fait croître x de 0 à 2π, on le fait croître de 2π à 4π, de 4π à 6π, etc., le cosinus repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de 0 à 2π ; il en est de même si l'on fait croître x de -2π à 0, de -4π à -2π, etc.

30. On voit que le cosinus d'un arc x ne change pas lorsqu'on remplace x par $x+2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, de sorte que l'on a

$$\cos x = \cos(x+2k\pi).$$

D'ailleurs on voit facilement, comme pour la sécante, que 2π est le plus petit arc qui puisse être ajouté à x sans changer la valeur de $\cos x$. Donc *cosx est une fonction périodique de l'arc x et l'amplitude de la période est* 2π.

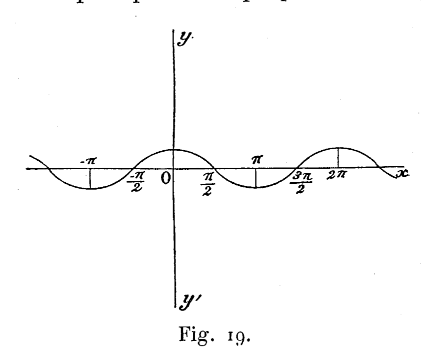


Fig. 19.

31. Construisons comme précédemment deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 19), posons :

$$y = \cos x,$$

et représentons par une courbe la variation de $\cos x$; un raisonnement analogue au raisonnement fait pour représenter la variation de $\sin x$ fournit la figure 19.

VARIATIONS DE LA COTANGENTE.

32. Si le point mobile M se déplace sur la circonférence de A en B (*fig.* 20), c'est-à-dire si l'arc x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, d'après la définition de la cotangente, la cotangente est positive et décroît



de $+\infty$ à o. Si le point M dépasse le point B, la cotangente devient négative, et, si le point M se déplace sur la circonférence de B en A′, c'est-à-dire si l'arc x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, la cotangente reste négative et décroît de o à $-\infty$. Si le mobile dépasse le point A′, la cotangente devient positive, infiniment grande, et saute ainsi brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; cot x est donc fonction discontinue de x pour $x=\pi$. Si le mobile parcourt l'arc A′B′A, c'est-à-dire si x croît de π à 2π, la cotangente reprend les mêmes valeurs dans le même ordre. Le tableau de discussion est le suivant :

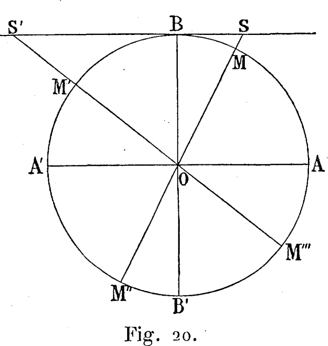


Fig. 20.

x	o	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	2π
cot x	$+\infty$	décroît	o	décroît	$-\infty$ $\vert$ $+\infty$	décroît	o	décroît	$-\infty$

On voit donc que, l'arc croissant de o à π, la cotangente prend toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$, et ne prend qu'une fois chacune d'elles.

Si, après avoir fait croître x de o à 2π, on le fait croître de 2π à 3π, de 3π à 4π, etc., la cotangente repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de o à π; il en sera de même si l'on fait croître x de $-\pi$ à o, de -2π à $-\pi$, de -3π à -2π, etc.

33. La valeur de cot x ne change pas quand on remplace x par $x+k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, de sorte que l'on a :

$$\cot x = \cot(x+k\pi).$$

D'ailleurs, on voit facilement, comme pour la tangente, que π est le plus petit arc constant qui peut être ajouté à x sans changer la valeur de cot x; donc *cotx est une fonction périodique de l'arc x, et l'amplitude de la période est* π.

34. Construisons deux axes rectangulaires (*fig.* 21) et repré-

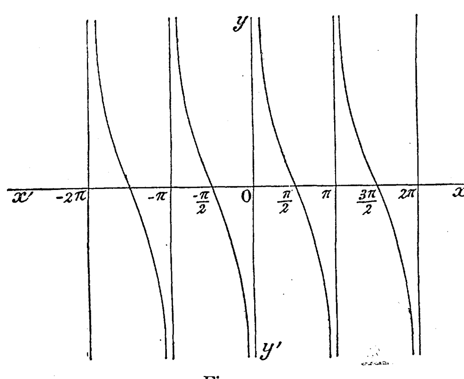


Fig. 21.

sentons par une courbe la variation de la fonction $y = \cot x$; la discussion précédente montre que la courbe possède comme asymptotes l'axe $y'Oy$ et des parallèles à cette droite équidistantes les unes des autres d'une longueur égale à π et a la forme indiquée par la figure 21.

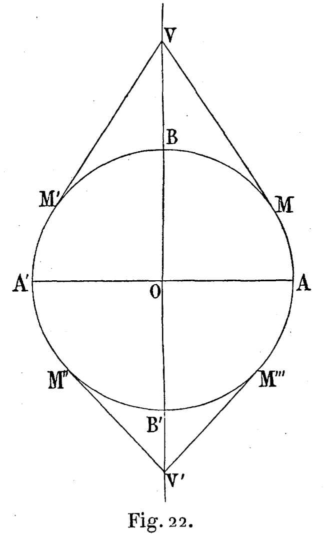


Fig. 22.

VARIATIONS DE LA COSÉCANTE.

35. Si le point M se déplace sur la circonférence de A en B, c'est-à-dire si l'arc x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 22), la cosécante est positive et décroît de $+\infty$ à $+1$, valeur qu'elle atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$; si le point M se déplace de B en A', c'est-à-dire si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, la cosécante reste positive, reprend, en ordre inverse, les mêmes valeurs, et croît de $+1$ à $+\infty$. Si le point M dépasse le point A', la cosécante change de signe et passe

brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; elle est donc discontinue pour $x=\pi$; si le point M va de A′ en B′, c'est-à-dire si x croît de π à $\frac{3\pi}{2}$, la cosécante reste négative et croît de $-\infty$ à -1 ; enfin si le point M va de B′ en A, c'est-à-dire si x croît de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, la cosécante est négative, reprend, en ordre inverse, les valeurs précédentes, et décroît de -1 à $-\infty$.

On voit donc que, l'arc croissant de 0 à 2π, la cosécante est continue pour les valeurs de x comprises dans cet intervalle, sauf pour $x=0$, pour $x=\pi$, pour $x=2\pi$, qu'elle prend deux fois, et deux fois seulement, toute valeur comprise entre $+1$ et $+\infty$, ou entre $-\infty$ et -1, mais qu'elle ne prend aucune valeur comprise entre -1 et $+1$.

La discussion précédente est résumée dans le tableau suivant :

x	0	croît	$\frac{\pi}{2}$	croît	π	croît	$\frac{3\pi}{2}$	croît	2π
coséc x	$+\infty$	décroît	$+1$	croît	$+\infty$ | $-\infty$	croît	-1	décroît	$-\infty$

Si, après avoir fait croître x de 0 à 2π, on le fait croître de 2π à 4π, de 4π à 6π, etc., la cosécante repasse par les mêmes variations de grandeur et de signe que lorsque l'arc croît de 0 à 2π ; il en sera de même si l'on fait croître x de -2π à 0, de -4π à -2π, etc.

36. La cosécante d'un arc x ne change pas lorsqu'on remplace x par $x+2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et l'on a :

$$\text{coséc}\, x = \text{coséc}\,(x+2k\pi).$$

D'ailleurs on voit facilement, comme pour le sinus, que 2π est le plus petit arc constant qui peut être ajouté à x sans changer la valeur de coséc x. Donc *coséc x est une fonction périodique de l'arc x, et l'amplitude de la période est* 2π.

37. Traçons deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 23), et posons $y=\text{coséc}\, x$; la variation de cette fonction est représentée par la figure 23, et l'on voit que la courbe pos-

sède comme asymptotes $y'Oy$ et toutes les parallèles à cette droite équidistantes les unes des autres de la longueur π.

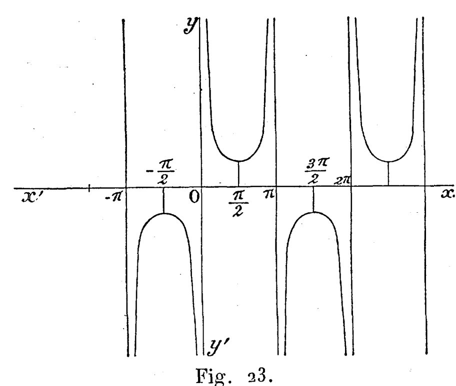


Fig. 23.

38. **Remarque.** Les discussions précédentes nous montrent que :

1° Si l'extrémité d'un arc se trouve dans le premier quadrant, toutes ses lignes trigonométriques sont positives ;

2° Si l'extrémité d'un arc se trouve dans le deuxième quadrant, toutes ses lignes trigonométriques sont négatives, sauf le sinus et la cosécante ;

3° Si l'extrémité d'un arc se trouve dans le troisième quadrant, toutes ses lignes trigonométriques sont négatives, sauf la tangente et la cotangente ;

4° Si l'extrémité d'un arc se trouve dans le quatrième quadrant, toutes ses lignes trigonométriques sont négatives, sauf le cosinus et la sécante.

Donc, au point de vue du signe, les six lignes trigonométriques s'associent, deux par deux, en trois groupes tels que les deux lignes de chaque groupe sont toujours de même signe ; les lignes trigonométriques ainsi associées sont :

Le *sinus* et la *cosécante ;*

La *tangente* et la *cotangente ;*

Le *cosinus* et la *sécante.*

§ III. — Relations entre les lignes trigonométriques de certains arcs qui satisfont a des conditions particulières données.

ARCS ÉGAUX ET DE SIGNES CONTRAIRES.

39. Deux arcs égaux et de signes contraires, qui ont le

point A pour origine (*fig.* 24), sont nécessairement terminés en des points M et M′ symétriques par rapport au diamètre AA′; d'après cela, il est visible que deux arcs égaux et de signes contraires ont :

1° *Des sinus égaux et de signes contraires; des cosécantes égales et de signes contraires ;*

2° *Des tangentes égales et de signes contraires ; des cotangentes égales et de signes contraires ;*

3° *Le même cosinus ; la même sécante.*

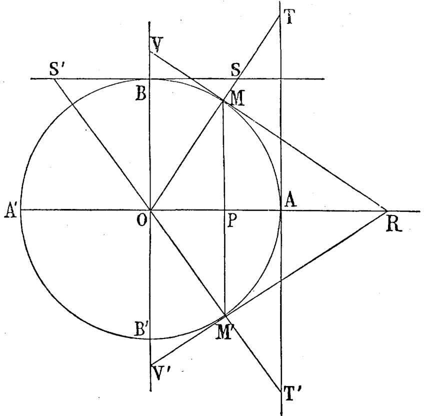


Fig. 24.

Si donc on désigne par x un arc quelconque, on a :

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{coséc}(-x) = -\text{coséc}\, x$$
$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$
$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{séc}(-x) = \text{séc}\, x.$$

40. En d'autres termes, si l'on remplace un arc par un arc égal et de signe contraire, le cosinus et la sécante ne changent pas, tandis que les autres lignes trigonométriques changent de signe sans changer de valeur absolue.

ARCS DONT LA DIFFÉRENCE EST π.

41. Si l'on ajoute π à un arc AM (*fig.* 25), l'extrémité de l'arc vient se placer au point M′ diamétralement opposé au point M. On voit facilement que ces arcs qui diffèrent de π ont :

1° *Des sinus égaux et de signes contraires ; des cosécantes égales et de signes contraires ;*

2° *Même tangente ; même cotangente ;*

3° *Des cosinus égaux et de signes contraires ; des sécantes égales et de signes contraires.*

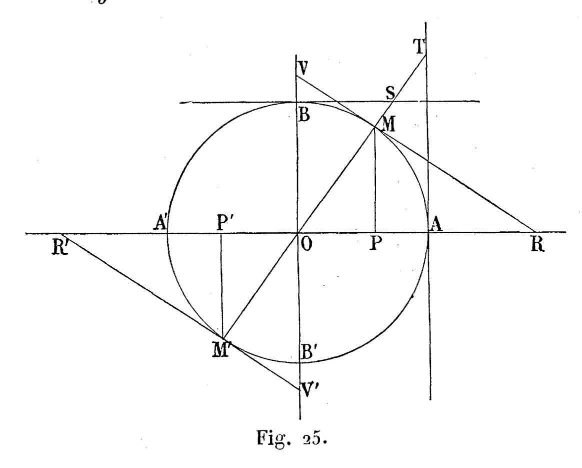


Fig. 25.

Si donc on désigne par x un arc quelconque, on a :

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \text{coséc}(\pi + x) = -\text{coséc}\, x$$
$$\text{tg}(\pi + x) = \text{tg}\, x \qquad \cot(\pi + x) = \cot x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \text{séc}(\pi + x) = -\text{séc}\, x.$$

42. En d'autres termes, si on ajoute π à un arc, la tangente et la cotangente ne changent pas, les autres lignes trigonométriques changent de signe, sans changer de valeur absolue.

ARCS SUPPLÉMENTAIRES.

43. On sait que si x est un arc quelconque, le supplément de cet arc est $\pi - x$. Ceci posé, dans les formules du n° 41, changeons x en $-x$ et tenons compte des formules du n° 39, nous aurons :

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \text{coséc}(\pi - x) = \text{coséc}\, x$$
$$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg}\, x \qquad \cot(\pi - x) = -\cot x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \text{séc}(\pi - x) = -\text{séc}\, x.$$

Donc deux arcs supplémentaires ont :

1° *Même sinus ; même cosécante ;*

2° *Des tangentes égales et de signes contraires ; des cotangentes égales et de signes contraires ;*

3° *Des cosinus égaux et de signes contraires ; des sécantes égales et de signes contraires.*

44. En d'autres termes, si on remplace un arc par son supplément, le sinus et la cosécante ne changent pas, les autres lignes trigonométriques changent de signe, sans changer de valeur absolue.

ARCS DONT LA DIFFÉRENCE EST $\frac{\pi}{2}$.

45. Si on ajoute $\frac{\pi}{2}$ à un arc, les lignes trigonométriques sont remplacées en valeur absolue par les lignes complémentaires, deux de ces lignes conservent leurs signes, le sinus et la cosécante, les quatre autres prennent les signes contraires. En effet

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\cos(-x)=\quad\cos x,\quad \text{coséc}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\quad\text{séc}\, x,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\text{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\cot(-x)=-\cot x,\quad \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{tg}\, x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right]=\sin(-x)=-\sin x,\quad \text{séc}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\text{coséc}\, x.$$

§ IV. — Fonctions circulaires inverses.

46. Nous avons, dans ce qui précède, considéré chaque ligne trigonométrique d'un arc comme une fonction de cet arc ; ces diverses fonctions ont été appelées *fonctions circulaires.* Nous avons vu qu'à chaque valeur de l'arc, c'est-à-dire de la variable, correspond une valeur, et une seule, pour la ligne trigonométrique, c'est-à-dire pour la fonction, et nous avons suivi les variations de cette fonction quand la variable croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Inversement, on peut considérer l'arc comme une fonction



d'une ligne trigonométrique que l'on prend pour variable ; une pareille fonction est appelée *fonction circulaire inverse*. Mais, à une ligne trigonométrique donnée correspondent des arcs en nombre infini, dès lors la définition d'une fonction circulaire inverse nécessite quelques précautions.

47. **Arc sin** x. Considérons d'abord la fonction $y = \text{arc} \sin x$, cela veut dire que y est un arc dont le sinus est x ; x ou le sinus est la variable indépendante, y est la fonction. On voit d'abord que x, représentant un sinus, ne peut prendre que des valeurs comprises entre -1 et $+1$. Donnons à x une certaine valeur comprise entre -1 et $+1$, et portons sur le diamètre BB', à partir du point O (*fig.* 26), une longueur égale à la valeur absolue du sinus donné, dans le sens OB ou dans le sens OB', suivant que le sinus donné est positif ou négatif; soit Q l'extrémité de cette longueur. Par le point Q menons la corde MM' parallèle au diamètre AA', qui rencontre la circonférence aux deux points M et M'. Les arcs qui correspondent au sinus donné sont évidemment ceux qui, ayant le point A pour origine, sont terminés soit au point M, soit au point M'.

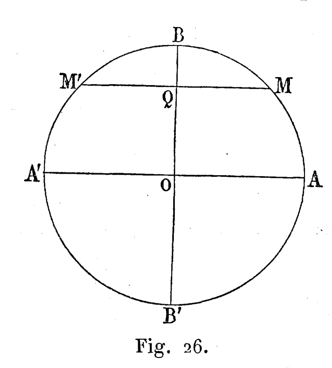


Fig. 26.

Désignons par α l'un quelconque des arcs terminés au point M ; on obtient tous les arcs terminés au point M en augmentant ou en diminuant l'arc α d'un certain nombre de circonférences ; donc tous ces arcs sont compris dans la formule

$$2k\pi + \alpha,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Considérons maintenant les arcs terminés en M' et ayant leur origine en A ; parmi ces arcs, un d'eux est égal à $\pi - \alpha$, car pour amener un mobile de A en M' sur le cercle, on peut d'abord lui faire parcourir un arc π dans le sens positif, ce qui l'amène en A', puis à partir de A' un arc égal à $-\alpha$, ce qui l'amène en M'. Dès lors, tous les arcs terminés en M' sont

compris dans la formule

$$2k\pi + \pi - \alpha \quad \text{ou} \quad (2k+1)\pi - \alpha.$$

En résumé, on voit que tous les arcs correspondant au sinus donné x sont compris dans l'une ou l'autre des formules

$$y = 2k\pi + \alpha, \qquad y = (2k+1)\pi - \alpha,$$

où α est l'un quelconque d'entre eux et où k est un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

48. Il résulte de là que la fonction $y = \text{arc sin } x$ n'est pas suffisamment définie ; elle aura un sens précis si on choisit, parmi les valeurs de l'arc correspondant à une valeur particulière x_0 du sinus, l'une d'elles que l'on désignera par y_0 ; car alors si x varie d'une manière continue à partir de x_0, un des arcs partira de la valeur y_0 et variera d'une manière continue ; c'est celui-là que nous désignerons par $y = \text{arc sin } x$. Si par exemple on prend, parmi les arcs correspondant à la valeur $x = 0$, celui qui a pour valeur $2k\pi$, k étant un nombre entier positif ou négatif déterminé, lorsque x croît de -1 à $+1$, l'arc correspondant y ira en croissant, et sa variation est indiquée dans le tableau suivant :

x	-1		0		$+1$
arc sin x	$2k\pi - \frac{\pi}{2}$	croît	$2k\pi$	croît	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$

Si au contraire on prend, parmi les arcs correspondant à la valeur $x = 0$, celui qui a pour valeur $(2k+1)\pi$, k étant un nombre entier déterminé positif ou négatif, lorsque x croît de -1 à $+1$, l'arc correspondant y ira en décroissant, et sa variation est indiquée dans le tableau suivant :

x	-1		0		$+1$
arc sin x	$(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$	décroît	$(2k+1)\pi$	décroît	$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}$

49. **Arc coséc** x. On verrait facilement que les arcs dont la cosécante est égale à une valeur x, comprise soit entre $-\infty$ et -1, soit entre $+1$ et $+\infty$, sont donnés par les formules

$$2k\pi + \alpha, \qquad (2k+1)\pi - \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux.

50. **Arc tg x**. Considérons maintenant la fonction $y = \text{arc tg}\, x$; x étant une tangente peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Donnons à x une valeur quelconque et portons sur la tangente L'AL en A au cercle trigonométrique à partir du point A, une longueur égale à la valeur absolue de la tangente donnée, dans le sens AL ou dans le sens AL' suivant que la tangente donnée est positive ou négative ; soit T l'extrémité de cette longueur (*fig.* 27). Menons par le point T le diamètre MM'; les arcs qui, ayant pour origine le point A, ont leur tangente égale à la tangente donnée, sont terminés soit en M, soit en M'.

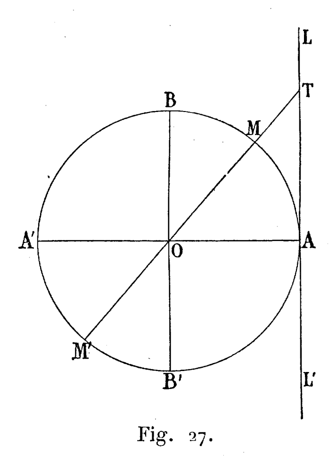


Fig. 27.

Désignons par α l'un quelconque des arcs terminés au point M; tous les arcs terminés au point M sont les arcs compris dans la formule

$$2k\pi + \alpha,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Parmi les arcs terminés en M', l'un d'eux est égal à $\pi + \alpha$; donc tous les arcs terminés en M' sont les arcs compris dans la formule

$$2k\pi + \pi + \alpha \quad \text{ou} \quad (2k+1)\pi + \alpha.$$

En résumé, les arcs qui admettent comme tangente la tangente donnée x sont compris dans la formule unique

$$y = k\pi + \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux, et k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

51. Il résulte de cette discussion que la fonction $y = \text{arc tg}\, x$ n'est pas suffisamment définie ; pour lui donner un sens précis, choisissons, parmi les valeurs de l'arc correspondant à une valeur particulière x_0 de la tangente, l'une d'elles que

nous désignerons par y_0 ; si on fait varier x d'une manière continue à partir de la valeur x_0, un des arcs partira de la valeur y_0, et variera d'une manière continue ; c'est cet arc ainsi défini que nous désignerons par $y = \text{arc tg } x$.

Si, par exemple, on prend, parmi les arcs correspondant à la valeur $x = 0$, celui qui a pour valeur $k\pi$, k étant un nombre entier positif ou négatif déterminé, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, l'arc correspondant y ira en croissant, et sa variation est indiquée dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arc tg x	$k\pi - \frac{\pi}{2}$	croît	$k\pi$	croît	$k\pi + \frac{\pi}{2}$

Quel que soit k, tous les arcs croissent lorsque x croît, et si x croît de $-\infty$ à $+\infty$, chacun d'eux augmente de π.

52. **Arc cot** x. On verrait facilement que les arcs dont la cotangente est égale à une valeur x quelconque sont compris dans la formule

$$k\pi + \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux, et k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Il est bon de remarquer que si x croît de $-\infty$ à $+\infty$, et si on a choisi parmi ces arcs l'un d'eux, par exemple celui qui pour $x = 0$ est égal à $k\pi + \frac{\pi}{2}$, cet arc décroît de $k\pi + \pi$ à $k\pi$ lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, comme le montre le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arc cot x	$k\pi + \pi$	décroît	$k\pi + \frac{\pi}{2}$	décroît	$k\pi$

53. **Arc cos** x. Considérons la fonction $y = \text{arc cos } x$; x représentant un cosinus ne peut prendre que des valeurs comprises entre -1 et $+1$. Donnons à x une valeur quelconque comprise entre -1 et $+1$, et cherchons les arcs correspondant à ce cosinus donné. Portons pour cela sur le diamètre A'A, à partir du point O, une longueur égale à la



valeur absolue du cosinus donné x, dans le sens OA ou dans le sens OA′ suivant que le cosinus est positif ou négatif; soit P l'extrémité de cette longueur (*fig.* 28). Menons par le point P la corde MM′ perpendiculaire au diamètre AA′ qui rencontre la circonférence en M et en M′. Les arcs qui, ayant pour origine le point A, ont leur cosinus égal au cosinus donné, sont terminés, soit au point M, soit au point M′.

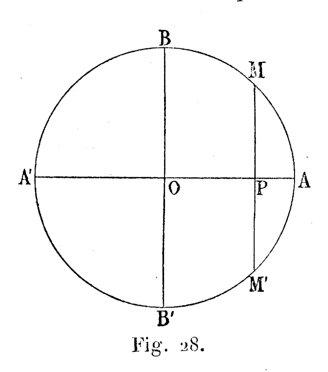


Fig. 28.

Désignons par α l'un quelconque des arcs terminés en M; les arcs terminés en M sont tous les arcs compris dans la formule

$$2k\pi + \alpha,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Parmi les arcs terminés en M′ se trouve l'arc $-\alpha$; par suite les arcs terminés en M′ sont les arcs compris dans la formule

$$2k\pi - \alpha.$$

En résumé, les arcs qui ont leur cosinus égal au cosinus donné x sont compris dans la formule

$$y = 2k\pi \pm \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux, et k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

54. Il résulte de cette discussion que la fonction $y = \text{arc}\cos x$ n'est pas suffisamment définie. Pour lui donner un sens précis, choisissons, parmi les arcs correspondant à une valeur particulière x_0 du cosinus, l'un d'eux que nous désignerons par y_0; si on fait varier x d'une manière continue à partir de x_0, un des arcs partira de la valeur y_0 et variera d'une manière continue; c'est celui-là que nous considérerons et que nous désignerons par $y = \text{arc}\cos x$.

Si, par exemple, on choisit parmi les arcs correspondant à la valeur $x = 0$ celui qui est égal à $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, k étant un nombre

entier donné, lorsque x croîtra de -1 à $+1$, cet arc ira en décroissant et sa variation est indiquée dans le tableau :

x	-1		0		$+1$
arc cos x	$2k\pi+\pi$	décroît	$2k\pi+\frac{\pi}{2}$	décroît	$2k\pi$

Si, au contraire, on choisit parmi les arcs correspondant à la valeur $x=0$ du cosinus celui qui est égal à $2k\pi-\frac{\pi}{2}$, k étant un nombre entier donné, lorsque x croîtra de -1 à $+1$, cet arc ira en croissant, comme le montre le tableau suivant :

x	-1		0		$+1$
arc cos x	$2k\pi-\pi$	croît	$2k\pi-\frac{\pi}{2}$	croît	$2k\pi$

55. **Arc séc** x. On verrait facilement que si on se donne une valeur x de la sécante, comprise soit entre $-\infty$ et -1, soit entre $+1$ et $+\infty$, les arcs qui admettent une sécante égale à la sécante donnée sont compris dans la formule

$$2k\pi\pm\alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux, et k désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

§ V. — Relations fondamentales entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

56. Nous avons introduit six fonctions circulaires d'un même arc : le sinus, la tangente, la sécante, le cosinus, la cotangente, la cosécante. Ces six fonctions ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'on ne peut pas donner à deux ou à plusieurs d'entre elles des valeurs arbitraires ; mais on peut prendre l'une d'elles à volonté, par exemple le cosinus.

En effet, supposons qu'on se donne un cosinus ; on sait que si P est l'extrémité de la longueur égale au cosinus donné, longueur portée à partir de O dans le sens convenable sur le diamètre A'A, et si M et M' sont les extrémités de la corde perpen-



diculaire au diamètre AA′ menée par P, tous les arcs correspondant à ce cosinus sont terminés les uns au point M, les autres au point M′ (*fig.* 29). Tous ces arcs admettent, comme on l'a vu (39), deux sinus égaux et de signes contraires, deux cosécantes égales et de signes contraires, deux tangentes égales et de signes contraires, deux cotangentes égales et de signes contraires, une même sécante. On voit donc que si le cosinus est donné, les cinq autres lignes trigonométriques sont déterminées et que l'on obtient pour chacune d'elles au plus deux valeurs. Il existe donc entre ces six lignes trigonométriques cinq relations, et pas davantage, telles que si on se donne une quelconque de ces lignes, ces équations déterminent les cinq autres. Ce sont ces relations que nous allons établir.

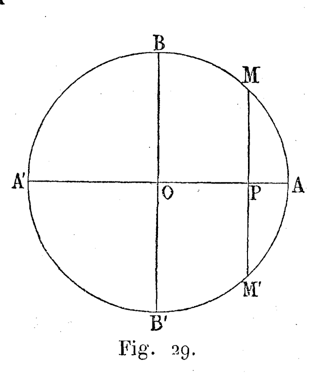


Fig. 29.

57. Désignons par x un arc AM que nous supposerons d'abord moindre que $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 30). Menons la perpendiculaire MP sur AA′, et prolongeons le rayon OM jusqu'à sa rencontre en T avec la tangente en A au cercle trigonométrique. L'arc étant moindre qu'un quadrant, ses six lignes trigonométriques sont positives. Dans le triangle rectangle OPM, on a :

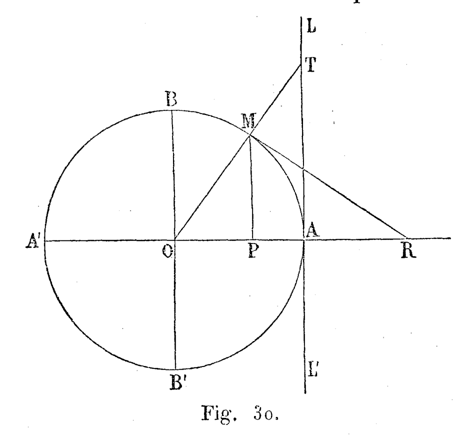


Fig. 30.

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 ;$$

mais OP est égal à $\cos x$; PM est égal à $\sin x$; OM, rayon du

cercle, est égal à 1 ; donc on a :

(1) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Les triangles OAT et OPM étant semblables, on a :

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP};$$

AT est égal à tg x ; OA est égal à 1 ; donc on a :

(2) $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Menons au point M la tangente MR, et soit R le point où elle rencontre le diamètre AA'.

Dans le triangle rectangle OMR, on a :

$$OR \times OP = \overline{OM}^2;$$

OR est égal à séc x ; OP est égal à $\cos x$; OM est égal à 1 ; on a donc séc $x \times \cos x = 1$, ou :

(3) $$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}.$$

58. Les formules (1), (2), (3), que nous avons établies en supposant l'arc x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, sont vraies quel que soit x.

En effet, quelle que soit la position du point M sur le cercle, si l'on effectue les constructions indiquées, on a toujours les relations suivantes :

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2,$$
$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP},$$
$$OR \times OP = \overline{OM}^2.$$

Or, les longueurs OP, PM, AT et OR représentent toujours, au signe près, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ et séc x. Il en résulte que les relations (1), (2), (3) ont lieu entre les valeurs absolues des lignes trigonométriques d'un arc quelconque. Par conséquent,

la relation (1), dans laquelle n'entrent que des carrés de lignes trigonométriques, est générale. Il reste à vérifier que les formules (2) et (3) sont encore vraies quand on a égard aux signes des lignes trigonométriques qu'elles renferment. Or, il est facile de voir, en se reportant à la remarque du n° 38 : 1° que le sinus et le cosinus d'un arc sont de même signe quand la tangente de cet arc est positive, et qu'ils sont de signes contraires quand la tangente est négative ; 2° que la sécante et le cosinus d'un même arc sont toujours de même signe. Cela démontre que les formules (2) et (3) sont encore exactes quand on a égard aux signes des lignes trigonométriques.

59. Si dans les formules (2) et (3) on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, on obtient deux nouvelles formules (4) et (5) qui sont générales comme les premières :

$$(4) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$(5) \qquad \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Les formules (1), (2), (3), (4), (5), sont les formules cherchées.

60. **Remarque.** Des formules fondamentales, on peut déduire quelques formules qui sont utiles.

Si on multiplie membre à membre les formules (2) et (4), on obtient la relation

$$(6) \qquad \text{tg}\, x \,.\, \cot x = 1.$$

D'ailleurs les formules (3) et (5) peuvent s'écrire :

$$(7) \qquad \cos x \,.\, \text{séc}\, x = 1,$$
$$(8) \qquad \sin x \,.\, \text{coséc}\, x = 1.$$

On voit alors que *le produit de deux lignes associées* (38) *est égal à* 1, ou que deux lignes associées sont telles que l'une est l'inverse de l'autre.

61. **Application.** Comme application des formules fondamentales, proposons-nous, étant donnée tg x, de calculer les autres lignes trigonométriques en fonction de tg x.

La formule (6) donne immédiatement :

$$(9) \qquad \cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Pour calculer $\sin x$ et $\cos x$, nous aurons à résoudre les deux équations (1) et (2),

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La seconde nous donne $\sin x = \operatorname{tg} x . \cos x$, et en portant dans la première,

$$\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 1,$$

d'où

$$(10) \qquad \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Mais $\sin x = \operatorname{tg} x . \cos x$; on a donc :

$$(11) \qquad \sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Enfin les formules (3) et (5) donnent,

$$(12) \qquad \text{séc}\, x = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$(13) \qquad \text{coséc}\, x = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}.$$

Il faut remarquer que dans les formules (10) et (11) il faut, devant le radical, mettre le même signe dans les deux formules, attendu que le rapport $\frac{\sin x}{\cos x}$ doit être égal à $\operatorname{tg} x$. Ce signe étant choisi, on prend dans les formules (12) et (13) ce même signe devant les radicaux.

Le problème est donc résolu ; il reste à discuter, c'est-à-dire à expliquer pourquoi l'on trouve pour $\sin x$ deux valeurs égales et de signes contraires, pour $\cos x$ deux valeurs égales et de signes contraires, et pour $\cot x$ une seule valeur.

La tangente étant donnée, portons sur la tangente en A au cercle trigonométrique, à partir du point A, dans le sens con-

venable, une longueur égale à la valeur absolue de cette tangente ; soit T son extrémité (*fig.* 31). Menons par T le diamètre MM′ ; l'arc x n'est pas déterminé ; c'est l'un quelconque des arcs qui, ayant le point A pour origine, sont terminés soit en M, soit en M′. Or les arcs terminés en M et les arcs terminés en M′ ont des sinus égaux et de signes contraires, des cosinus égaux et de signes contraires, et même cotangente, puisqu'ils diffèrent d'un nombre impair de fois π.

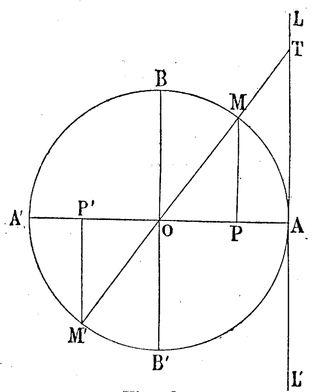


Fig. 31.

Le sinus et la cosécante étant associés comme signes, le cosinus et la sécante étant également associés, on devra trouver pour coséc x deux valeurs égales et de signes contraires, pour séc x deux valeurs égales et de signes contraires.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I.

1. Trouver les relations qui doivent exister entre deux arcs pour qu'ils aient : ou des sinus égaux et de signes contraires, ou des cosinus égaux et de signes contraires, ou des tangentes égales et de signes contraires.

2. Trouver les relations qui existent entre les lignes trigonométriques de deux arcs qui diffèrent de $\frac{3\pi}{2}$.

3. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc x en fonction de sin x, ou de séc x, ou de coséc x; expliquer géométriquement et trigonométriquement pourquoi l'on obtient tantôt une seule valeur, tantôt deux valeurs égales et de signes contraires.

4. Calculer les lignes trigonométriques d'un arc dont la tangente est égale au cosinus.

5. Calculer les valeurs des lignes trigonométriques des arcs $\frac{\pi}{4}$, ou $\frac{\pi}{3}$, ou $\frac{\pi}{6}$, ou $\frac{\pi}{5}$, ou $\frac{\pi}{10}$.

6. Démontrer que l'on a, quel que soit x,

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{a}{x+a}} = \text{arc cot}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

7. Démontrer que l'on a, quel que soit x,

$$\text{arc tg}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x-a}{2x}}.$$

8. L'arc x croissant de o à $\frac{\pi}{2}$, chercher les limites entre lesquelles varie l'expression

$$7\sin^2 x - 7\sin x + 9.$$

9. L'arc x croissant de o à $\frac{\pi}{2}$, chercher les limites entre lesquelles varie l'expression

$$6\cos^2 x + 6\cos x - 7.$$

CHAPITRE II

THÉORIE DES PROJECTIONS.

§ I. Projections quelconques. — § II. Projections orthogonales.

§ I. — Projections quelconques.

62. Considérons, sur une droite indéfinie $x'x$, deux points a et b, et supposons qu'un mobile se déplace en allant du point a vers le point b ; il peut se présenter deux cas : ou bien le mobile marche sur la droite indéfinie dans le sens $x'x$, que nous conviendrons de nommer le sens *positif*, ou bien le mobile marche dans le sens contraire xx', que nous nommerons le sens *négatif*. Ceci posé, nous appellerons *segment ab* et nous représenterons par $\overline{ab}$ la longueur ab affectée du signe $+$ ou

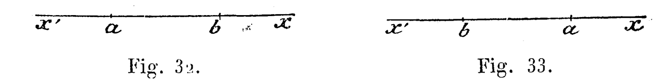


Fig. 32. Fig. 33.

du signe —, suivant que, pour aller de a vers b, le mobile se déplace dans le sens positif ou dans le sens négatif ; ainsi dans le premier cas (*fig.* 32) :

$$\overline{ab} = +ab,$$

dans le second cas (*fig.* 33) :

$$\overline{ab} = -ab.$$

63. Il résulte de cette définition que si l'on considère, sur la droite indéfinie $x'x$, deux points a et b, ces deux points déterminent deux segments $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$, égaux en valeur absolue, mais de signes contraires ; on a donc :

$$\overline{ab} = -\overline{ba}$$

ou

$$\overline{ab}+\overline{ba}=0.$$

64. **Théorème.** *Si a, b, c, ...h, l sont n points distribués sur une droite indéfinie $x'x$, dans un ordre quelconque, on aura, entre les segments déterminés sur la droite par ces points, la relation :*

$$(1) \qquad \overline{ab}+\overline{bc}+\ .....\ +\overline{hl}+\overline{la}=0.$$

Le théorème est vrai, d'après la remarque précédente, dans le cas de deux points, a et b, et on a :

$$\overline{ab}+\overline{ba}=0.$$

Je vais démontrer, en second lieu, que le théorème est vrai dans le cas de trois points a, b, c, c'est-à-dire que l'on a :

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=0.$$

Les points a et b étant donnés sur la droite $x'x$, le point c peut occuper, par rapport à ces deux points, trois positions ; il peut être, à droite des deux points, ou entre les deux, ou à gauche ; d'ailleurs a peut occuper par rapport à b deux positions. La figure peut donc présenter six dispositions différentes.

x' a b c x

Fig. 34.

Dans le premier cas (*fig.* 34), on a :

$$ac=ab+bc;$$

ou, comme les trois segments correspondants sont positifs :

$$\overline{ac}=\overline{ab}+\overline{bc},$$

ou

$$\overline{ab}+\overline{bc}-\overline{ac}=0;$$

mais

$$\overline{ac}=-\overline{ca};$$

donc

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=0.$$

Dans le second cas (*fig.* 35), on a :

$$ab = ac + cb,$$

et, comme les trois segments correspondants sont positifs :

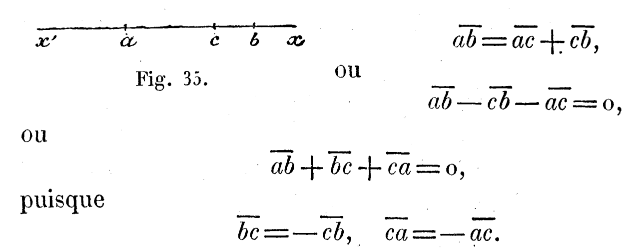


Fig. 35.

$$\overline{ab} = \overline{ac} + \overline{cb},$$

ou

$$\overline{ab} - \overline{cb} - \overline{ac} = 0,$$

ou

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 0,$$

puisque

$$\overline{bc} = -\overline{cb}, \quad \overline{ca} = -\overline{ac}.$$

Dans le troisième (*fig.* 36), on a :

$$cb = ca + ab,$$

Fig. 36.

ou

$$\overline{cb} = \overline{ca} + \overline{ab},$$

d'où

$$\overline{ab} - \overline{cb} + \overline{ca} = 0,$$

ou

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 0.$$

Les trois derniers cas se déduisent des trois premiers en changeant les signes de tous les segments.

Pour démontrer que le théorème est général, il suffit de prouver que, s'il est vrai dans le cas de $n - 1$ points, il est vrai dans le cas de n points.

Supposons donc que l'on ait, dans le cas de $n - 1$ points a, b, c, ... g, h, situés sur la droite $x'x$, la relation segmentaire

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \ldots\ldots + \overline{gh} + \overline{ha} = 0.$$

Soit l un n^e point placé sur la droite $x'x$ d'une façon quelconque; associant les trois points a, h, l, on a, d'après ce qui a été démontré pour trois points :

$$\overline{ah} + \overline{hl} + \overline{la} = 0.$$

Ajoutons membre à membre les deux relations précédentes, et remarquons que l'on a :

$$\overline{ha}+\overline{ah}=0;$$

nous aurons :

$$\overline{ab}+\overline{bc}+ \ldots\ldots +\overline{gh}+\overline{hl}+\overline{la}=0:$$

c'est la relation qu'il s'agissait d'établir entre les n points a, b, c, ... h, l.

65. **Corollaire.** *a et b étant deux points situés sur une droite indéfinie, soit o un point quelconque mais déterminé sur la droite, à partir duquel on veut compter les distances, on aura :*

$$\overline{ab}=\overline{ob}-\overline{oa}.$$

En effet, entre les trois points o, a, b, on a la relation segmentaire

$$\overline{ab}+\overline{bo}+\overline{oa}=0,$$

d'où

$$\overline{ab}=-\overline{bo}-\overline{oa}=\overline{ob}-\overline{oa}.$$

66. **Définition.** Soit $x'x$ une droite indéfinie, et soit P un plan fixe non parallèle à la droite (*fig.* 37). On appelle *projection* d'un point quelconque M de l'espace sur la droite $x'x$, le point m où le plan mené par le point M parallèlement au plan P rencontre la droite $x'x$. La droite $x'x$ est appelée *axe de projection;* la droite $x'x$ et le plan P forment ce que l'on appelle le *système de projection.*

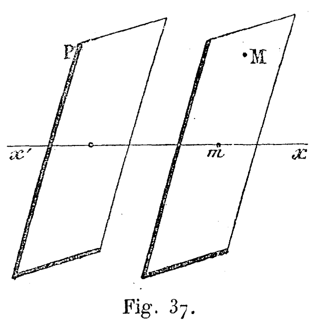


Fig. 37.

Ceci posé, soit AB une portion de droite (*fig.* 38); soient a et b les projections des extrémités A et B de la droite sur l'axe $x'x$; considérons un mobile M parcourant AB de A vers B, soit m la projection du mobile M sur l'axe $x'x$; lorsque le mobile M parcourt AB dans le sens AB, le mobile projection m parcourt

ab dans le sens *ab*. On appelle *projection* de la portion de droite AB sur l'axe indéfini $x'x$, projection faite parallèlement au plan P, la longueur de la portion *ab* de l'axe comprise entre les projections des extrémités de la droite AB, affectée du signe + ou du signe —, suivant que pour aller de *a* en *b* le mobile projection marche sur l'axe $x'x$ dans le sens positif, ou dans le sens négatif. La projection de AB est donc un segment, et si nous désignons par (AB) la projection de AB sur l'axe, on aura :

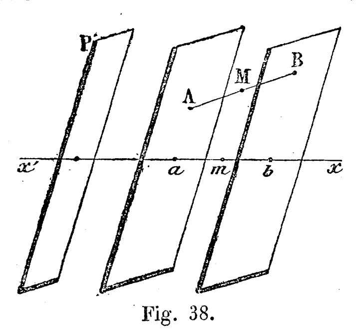


Fig. 38.

$$(AB)=\overline{ab}.$$

67. **Corollaire.** *Si l'on considère les deux portions de droite* AB *et* BA *égales, mais parcourues en sens contraires, leurs projections sont égales et de signes contraires :*

$$(AB)=-(BA).$$

68. **Remarque I.** Si le plan P est perpendiculaire à l'axe $x'x$, on dit que la projection est *orthogonale*. On peut remarquer que dans ce cas la projection *m* du point M sur l'axe $x'x$ est le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe $x'x$.

69. **Remarque II.** Si la figure que l'on projette et l'axe $x'x$ sont dans un même plan Q, il suffit, pour définir le système de projection, de se donner sur le plan Q la trace du plan projetant ; cette droite s'appelle la direction des projetantes ; dans ce cas, pour avoir la projection *m* d'un point M sur l'axe, il suffit de mener par M une parallèle à la direction des projetantes jusqu'à sa rencontre en *m* avec l'axe $x'x$.

70. **Théorème.** *La somme algébrique des projections des côtés d'un polygone fermé, plan ou gauche, sur un axe quelconque, est nulle.*

Soit ABCDEA le polygone fermé (*fig.* 39) et supposons que

le périmètre du polygone soit parcouru par le mobile dans le sens ABCDEA, A étant le point de départ et le point d'arrivée du mobile. Soient a, b, c, d, e les projections des sommets du polygone sur un axe $x'x$; ces points déterminent sur l'axe indéfini des segments tels que l'on a (64) :

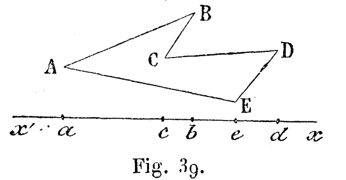


Fig. 39.

$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}=0.$$

Mais par définition

$$(AB)=\overline{ab},$$
$$(BC)=\overline{bc}, \text{ etc.}$$

On a donc :

$$(AB)+(BC)+(CD)+(DE)+(EA)=0.$$

71. **Définition**. Étant donnée une ligne polygonale continue non fermée, dont A est le point de départ, L le point d'arrivée, on appelle *résultante* du contour polygonal la droite qui joint le point de départ A au point d'arrivée L ; la résultante est supposée parcourue par le mobile dans le sens AL.

72. **Théorème**. *La somme algébrique des projections des côtés d'une ligne polygonale sur un axe est égale à la projection de la résultante sur le même axe.*

Soit ABC .... L la ligne polygonale donnée, soit AL la résultante. Considérons le polygone fermé ABCD ... HLA, on a (70) :

$$(AB)+(BC)+\ldots\ldots+(HL)+(LA)=0.$$

Mais (67)

$$(LA)=-(AL);$$

on a donc :

$$(AB)+(BC)+\ldots\ldots+(HL)-(AL)=0,$$

ou

$$(AB)+(BC)+\ldots\ldots+(HL)=(AL),$$

ce qui démontre le théorème.

73. On appelle *projection* d'une ligne brisée ABC ... L sur un axe, la somme algébrique des projections des côtés de cette

ligne brisée sur cet axe; le théorème précédent exprime donc que : *la projection d'une ligne brisée sur un axe est égale à la projection de la résultante sur le même axe.*

74. **Corollaire.** Si l'on considère deux lignes brisées ayant les mêmes extrémités, leurs projections sur un axe quelconque sont égales entre elles, comme égales toutes les deux à la projection de la résultante, qui est la même dans les deux cas.

75. **Remarque.** Pour que la projection d'une ligne polygonale sur un axe soit nulle, il faut et il suffit que les projections des points extrêmes se confondent; il en sera ainsi, ou bien si ces points extrêmes se confondent, ou bien si la droite qui les joint est parallèle au plan P; dans tout autre cas, les projections des points extrêmes seront distinctes et par suite la projection de la ligne polygonale ne sera pas nulle.

On conclut de cette remarque les conséquences suivantes :

1° La condition nécessaire et suffisante pour qu'un contour polygonal plan soit fermé est que les projections de ce contour, faites suivant deux directions différentes sur deux axes situés dans son plan, soient nulles.

2° La condition nécessaire et suffisante pour qu'un contour polygonal gauche soit fermé est que les projections de ce contour faites parallèlement à trois plans non parallèles à une même droite, sur trois axes quelconques, soient nulles.

§ II. — Projections orthogonales.

76. Étant données deux demi-droites indéfinies Oy, $O'z$ dans l'espace (*fig.* 40) qui déterminent deux directions Oy, $O'z$, on appelle *angle de ces deux directions* l'angle moindre que π formé en menant par un point A quelconque de l'espace des droites Ay', Az' respectivement parallèles aux deux directions et de même sens que chacune d'elles.

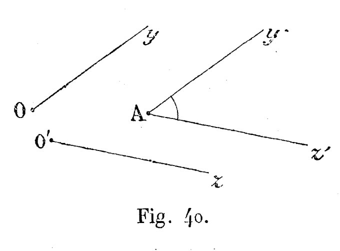


Fig. 40.

77. **Théorème.** *Dans un triangle rectangle, chaque côté de*

l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse.

Soit ABC un triangle rectangle, A étant le sommet de l'angle droit (*fig.* 41). Décrivons du sommet B comme centre une circonférence d'un rayon BM égal à l'unité de longueur; soit M le point d'intersection de cette circonférence avec l'hypoténuse BC, du même côté du point B que le point C; abaissons du point M la perpendiculaire MP sur le côté AB; si nous regardons le point N comme l'origine de l'arc qui mesure l'angle ABC, on voit que BP représente le cosinus de l'angle ABC en grandeur et en signe, puisque ce cosinus est positif. Les triangles semblables ABC, PBM donnent :

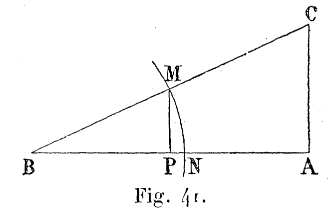


Fig. 41.

$$\frac{AB}{BP}=\frac{BC}{BM};$$

or

$$BP=\cos\widehat{ABC},\quad BM=1,$$

on a donc :

$$AB=BC\cos\widehat{ABC},$$

ce qu'il fallait démontrer.

78. **Théorème.** *La projection orthogonale d'une longueur* AB *sur un axe indéfini x'x est donnée en grandeur et en signe par le produit de la longueur* AB, *par le cosinus de l'angle aigu ou obtus que fait la direction* AB *avec la direction positive de l'axe des projections.*

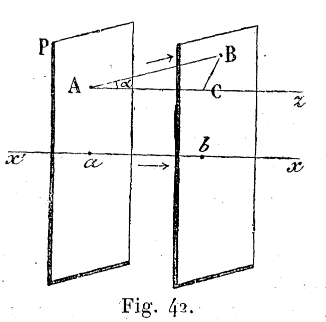


Fig. 42.

1er Cas. — La direction AB fait, avec la direction positive $x'x$ de l'axe des projections, un angle aigu α (*fig.* 42). Si par A nous menons le plan P perpendiculaire sur $x'x$, qui coupe $x'x$ au

point a, la portion de droite AB et la portion positive ax de l'axe $x'x$ sont du même côté de ce plan P ; donc la projection orthogonale du point B sur $x'x$ se fait en un point b situé sur la portion ax, et la projection de AB est positive : on a :

$$(AB) = + ab.$$

Menons par A une parallèle Az à $x'x$ jusqu'à sa rencontre en C avec le plan projetant de B et menons BC ; les deux longueurs ab et AC sont égales, parallèles et de même sens ; on a donc :

$$ab = AC ;$$

d'autre part, dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

$$AC = AB \cos \widehat{BAC} = AB \cos \alpha.$$

On a donc :

$$(AB) = + ab = + AC = AB \cos \alpha.$$

2e Cas. — La direction AB fait avec la direction positive $x'x$ de l'axe des projections un angle obtus α (*fig.* 43). Si par le point A nous menons le plan P perpendiculaire sur $x'x$, qui coupe $x'x$ au point a, la portion de droite AB et la portion positive ax de l'axe $x'x$ sont de part et d'autre du plan P ; donc la projection orthogonale du point B sur $x'x$ se fait en un point b, situé à gauche du point a sur la portion négative ax' de l'axe $x'x$; la projection de AB est négative et on a :

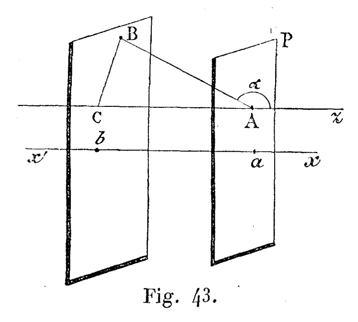


Fig. 43.

$$(AB) = - ab$$

Menons par A la parallèle Az à $x'x$; l'angle $\widehat{zAB}$ est l'angle α ; Az rencontre le plan projetant de B en un point C situé sur le prolongement de Az dans le sens zA ; et on a :

$$ab = AC.$$

Menons BC; dans le triangle ABC, rectangle en C, on a :

$$AC = AB \cos \widehat{BAC} = + AB \cos(\pi - \alpha) = - AB \cos \alpha.$$

On a donc :

$$(AB) = - ab = - AC = + AB \cos \alpha.$$

79. **Définition**. Nous avons supposé jusqu'à présent que l'on projetait sur $x'x$ la longueur d'une portion de droite; considérons maintenant le cas où l'on projette orthogonalement un *segment de droite*. Supposons pour cela que $y'oy$ étant une droite indéfinie sur laquelle le sens oy soit regardé comme positif, le sens oy' comme négatif (*fig.* 44), on considère une portion de droite AB parallèle à cette droite indéfinie; on appelle *segment* AB la longueur AB affectée du signe + ou du signe — suivant que pour aller de A vers B un mobile se déplace dans le sens oy, ou dans le sens opposé; dans le premier cas, le segment est dit positif; dans le second, il est dit négatif.

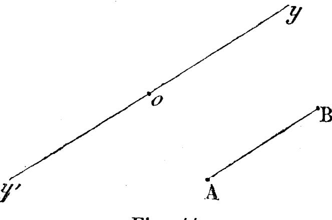


Fig. 44.

80. **Théorème**. *La projection orthogonale d'un segment* AB *sur un axe indéfini $x'x$ est donnée en grandeur et en signe par le produit de la valeur algébrique du segment par le cosinus de l'angle que fait la direction positive du segment avec la direction positive de l'axe des projections.*

Fig. 45.

1er Cas. — Le segment AB est positif (*fig.* 45); soit l la valeur algébrique de ce segment; on a :

$$l = + AB.$$

Soit α l'angle de la direction positive oy avec la direction

positive $x'x$; il suffit pour avoir cet angle de mener par un point o de $y'oy$ une parallèle oz à la direction positive $x'x$ de l'axe des projections; l'angle $\widehat{zoy}$ moindre que π est l'angle α.

Ceci posé, on a, d'après le théorème précédent :

$$(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB}\cos(\mathrm{AB}, x'x) = \mathrm{AB}\cos(oy, x'x) = \mathrm{AB}\cos\alpha = l\cos\alpha.$$

2ᵉ Cas. — Le segment AB est négatif (*fig.* 46); l étant la valeur algébrique du segment, on a :

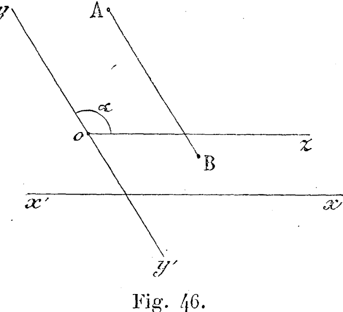


Fig. 46.

$$l = -\mathrm{AB}.$$

Dès lors, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB}) &= \mathrm{AB}\cos(\mathrm{AB}, x'x)\\ &= \mathrm{AB}\cos(oy', x'x)\\ &= -\mathrm{AB}\cos(oy, x'x)\\ &= -\mathrm{AB}\cos\alpha = l\cos\alpha,\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

81. **Remarque.** Soient un point o et deux demi-droites ox, oy issues de ce point (*fig.* 47); nous avons appelé angle de ces deux directions ox, oy, l'angle α moindre que π formé par ces deux demi-droites. Il est bon de remarquer que ces deux demi-droites font entre elles une infinité d'angles compris dans la formule

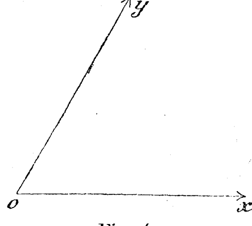


Fig. 47.

$$2k\pi \pm \alpha,$$

où k est un nombre entier positif ou négatif quelconque; tous ces angles ont même cosinus; dès lors, dans l'expression de la projection orthogonale d'une longueur AB, ou d'un segment AB, sur un axe, on pourra remplacer le plus petit angle α par l'un quelconque d'entre eux, $2k\pi \pm \alpha$, sans que la valeur de la projection soit modifiée soit comme grandeur, soit comme signe.

82. **Corollaire I.** Soit ABC..... KA une ligne polygonale

fermée, et supposons qu'un mobile parcoure le polygone dans le sens AB... KA; soient a, b...,k les valeurs algébriques des segments successifs parcourus par le mobile; soient α, β..... $\varkappa$ les angles des directions positives de ces segments avec la direction positive de l'axe des projections.

Le théorème (70) relatif à la projection d'une ligne polygonale fermée se traduira, en projections orthogonales, par la relation

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + \ldots\ldots + k \cos \varkappa = 0.$$

83. **Corollaire II.** Soit ABC... HL une ligne polygonale et soit AL sa résultante; supposons qu'un mobile parcoure la ligne polygonale ABC... L dans le sens ABC... L; soient $a, b, \ldots, h$ les valeurs algébriques des segments successifs parcourus par le mobile; soient α, $\beta, \ldots \eta$ les angles des directions positives de ces segments avec la direction positive de l'axe des projections. Supposons d'autre part qu'un mobile parcoure la résultante AL dans le sens AL; soit l la valeur algébrique du segment AL, et soit λ l'angle de la direction positive de ce segment avec la direction positive de l'axe des projections. Le théorème du n° 72, relatif à la projection d'un contour polygonal et de sa résultante, se traduira, en projections orthogonales, par la relation

$$l \cos \lambda = a \cos \alpha + b \cos \beta + \ldots\ldots + h \cos \eta.$$

84. **Remarque.** La relation précédente montre que la projection orthogonale d'une ligne brisée sur un axe est la même pour tous les axes qui font le même angle avec la résultante.

La même relation montre encore que la projection orthogonale d'une ligne brisée sur un axe perpendiculaire à sa résultante est nulle, que la projection orthogonale d'une ligne brisée est maximum quand l'axe de projection est parallèle à la résultante.



EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. Soient Ox, Oy, Oz, trois demi-droites indéfinies se coupant en un même point O de l'espace et rectangulaires entre elles deux à deux; soit OR une demi-droite indéfinie quelconque menée par le point O; démontrer que si α, β, γ désignent les angles que fait cette demi-droite OR respectivement avec Ox, Oy, Oz, on a, entre les cosinus de ces angles, la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Soient Ox, Oy, Oz, trois demi-droites indéfinies se coupant en un même point O de l'espace et rectangulaires entre elles deux à deux; soient OR et OS deux demi-droites indéfinies quelconques menées par le point O; démontrer que, si α, β, γ désignent les angles de la demi-droite OR avec Ox, Oy, Oz, si α', β', γ' désignent les angles de la demi-droite OS avec Ox, Oy, Oz, si enfin V désigne l'angle des deux demi-droites OR et OS, on a :

$$\cos V = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$



CHAPITRE III

FORMULES D'ADDITION, DE SOUSTRACTION, DE MULTIPLICATION ET DE DIVISION DES ARCS.

§ I. — Addition et soustraction des arcs.

85. **Sinus et cosinus de la somme et de la différence de deux arcs.** Proposons-nous de calculer le cosinus de la somme de deux arcs a et b en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs; la suite montrera que le problème proposé est possible. Soient a et b les deux arcs donnés, positifs ou négatifs : considérons le cercle trigonométrique, et portons, à partir de A, sur la circonférence de ce cercle, dans le sens convenable, un arc égal en grandeur et en signe à l'arc a; soit M son extrémité (*fig.* 48). A partir du point M considéré comme origine, prenons dans le sens convenable un arc égal en grandeur et en signe à l'arc b, et soit N son extrémité. Il résulte de la construction qu'un arc égal à $a+b$ et ayant son origine en A a son extrémité en N; donc l'un des angles de ON avec OA correspond à l'arc $a+b$.

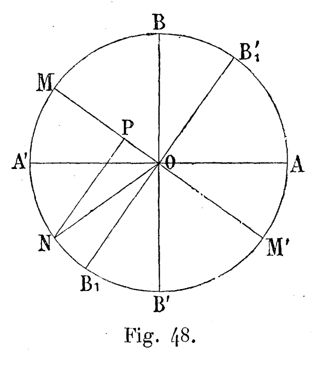


Fig. 48.

Pour tous les arcs ayant leur origine en A, OA est la direction positive des cosinus, OA' en est la direction négative; prenons à partir de A dans le sens positif un arc AB égal à $\frac{\pi}{2}$; soit B son extrémité; OB est la direction positive des

sinus des arcs ayant leur origine en A, OB′ en est la direction négative. De même, pour tous les arcs ayant leur origine en M, OM est la direction positive des cosinus, OM′ en est la direction négative; prenons à partir de M dans le sens positif un arc MB_1 égal à $\frac{\pi}{2}$, et menons OB_1; OB_1 est la direction positive des sinus des arcs ayant leur origine en M, OB_1' en est la direction négative.

Ceci posé, joignons ON et du point N abaissons la perpendiculaire NP sur le diamètre MM′; d'après ce qui précède, $\cos b$ est égal en grandeur et en signe au segment $\overline{OP}$, $\sin b$ est égal en grandeur et en signe au segment $\overline{PN}$. Projetons orthogonalement, sur la direction OA, les deux contours ON et OPN qui ont les mêmes extrémités; leurs projections sont égales :

$$(ON) = (OP) + (PN).$$

Or

$$(ON) = ON \cos(ON, OA) = 1 . \cos(a+b) \qquad = \cos(a+b),$$
$$(OP) = \overline{OP} \cos(OM, OA) = \cos b . \cos(OM, OA) = \cos b \cos a,$$
$$(PN) = \overline{PN} \cos(OB_1, OA) = \sin b . \cos(OB_1, OA) = \sin b \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$$
$$= -\sin b \sin a.$$

On a donc :

$$(1) \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

et cette formule est générale, quels que soient les arcs a et b, puisque le théorème des projections orthogonales est général.

86. Dans la formule (1), remplaçons b par $-b$, nous aurons :

$$(2) \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

formule donnant le cosinus de la différence de deux arcs, en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs, et cette formule est générale comme la précédente.

87. Enfin, dans les formules (1) et (2), changeons a en $\frac{\pi}{2} + a$, on a :

$$\left\{\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\sin b,\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+a-b\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\cos b+\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\sin b,\end{aligned}\right.$$

ou, d'après les formules du n° 45, et changeant les signes,

$$(3)\qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$
$$(4)\qquad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$$

Ces formules (3) et (4) sont générales, comme les formules (1) et (2) d'où on les a déduites.

88. **Tangente de la somme et de la différence de deux arcs.** Proposons-nous de calculer tg $(a+b)$ en fonction de tg a et de tg b. On a :

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b},$$

ou, en divisant les deux termes du dernier rapport par $\cos a\cos b$, et remarquant que tg $a=\frac{\sin a}{\cos a}$, tg$b=\frac{\sin b}{\cos b}$, on a :

$$(5)\qquad \operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}.$$

Si, dans cette formule, nous changeons b en $-b$, nous aurons :

$$(6)\qquad \operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b},$$

formule donnant la tangente de la différence de deux arcs en fonction des tangentes de ces arcs. Ces deux formules sont d'ailleurs générales, comme les quatre précédentes.

89. **Sinus et cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs.** Les formules (1) et (3) permettent d'obtenir le cosinus et le sinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, connaissant les sinus et les cosinus de ces arcs. On a, en effet :

$$\begin{aligned}\sin(a+b+c)=\sin\big((a+b)+c\big)&=\sin(a+b)\cos c+\cos(a+b)\sin c\\ &=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\cos c+(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\sin c,\end{aligned}$$

ou enfin

(7) $\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.$

De même

$$\cos(a+b+c) = \cos\big((a+b)+c\big) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c$$
$$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)\cos c - (\sin a \cos b + \cos a \sin b)\sin c,$$

d'où

(8) $\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos a - \sin a \sin c \cos b - \sin a \sin b \cos c.$

On aura de même :

$$\sin(a+b+c+d) = \sin\big((a+b+c)+d\big) = \sin(a+b+c)\cos d + \cos(a+b+c)\sin d,$$

$$\cos(a+b+c+d) = \cos\big((a+b+c)+d\big) = \cos(a+b+c)\cos d - \sin(a+b+c)\sin d,$$

et si l'on remplace $\sin(a+b+c)$, $\cos(a+b+c)$ par leurs valeurs données par les formules (7) et (8), on aura les formules cherchées; etc.

On peut ainsi trouver, par des calculs successifs, le sinus et le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs; la méthode suivie montre que le sinus et le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs sont des fonctions *entières* et *rationnelles* des sinus et des cosinus des différents arcs.

90. **Tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction des tangentes de ces arcs.** On a :

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \operatorname{tg}\big((a+b)+c\big) = \frac{\operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg} c} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} + \operatorname{tg} c}{1 - \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}\operatorname{tg} c}$$

ou enfin

$$(9)\quad \operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{tg}(a+b+c+d) = \operatorname{tg}\big((a+b+c)+d\big) = \frac{\operatorname{tg}(a+b+c) + \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg}(a+b+c)\operatorname{tg} d}$$

et si on remplace $\operatorname{tg}(a+b+c)$ par sa valeur (9), on aura la valeur de $\operatorname{tg}(a+b+c+d)$.

On aura de même, par des calculs successifs, la tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs, et l'on voit que la tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs s'exprime en fonction *rationnelle* des tangentes des différents arcs.

91. **Remarque.** Les méthodes précédentes sont peu commodes pour obtenir les formules générales d'addition d'un nombre quelconque d'arcs; nous verrons, dans les compléments, comment, au moyen de la théorie des quantités imaginaires, on peut établir les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs, la tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction des tangentes de ces arcs.

§ II. — Multiplication des arcs.

92. Le problème est le suivant : *Étant données les lignes trigonométriques d'un arc, trouver les lignes trigonométriques des multiples de cet arc.*

93. Proposons-nous d'abord de trouver le sinus, le cosinus, la tangente du double d'un arc, connaissant les lignes trigonométriques de cet arc. Il suffit, dans les formules d'addition, de supposer les arcs égaux entre eux. On a ainsi, en faisant $b=a$, dans les formules (1), (3) et (5) du paragraphe précédent :

$$(10)\qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

$$(11)\qquad \sin 2a = 2\sin a \cos a,$$

$$(12)\qquad \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

94. **Remarque.** Les formules (10) et (11) donnent le cosinus et le sinus du double d'un arc en fonction du sinus et du cosinus de cet arc. Il est souvent utile d'exprimer $\sin 2a$, $\cos 2a$ en fonction uniquement soit de $\sin a$, soit de $\cos a$. Remarquons qu'entre $\sin a$ et $\cos a$ existe la relation fondamentale

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$



Dès lors on aura, soit

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin 2a = 2\sin a \cos a \quad = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a}, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\ \sin 2a = 2\sin a \cos a \quad = \pm 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a}. \end{cases}$$

On voit ainsi que $\cos 2a$ s'exprime rationnellement en fonction soit de $\sin a$, soit de $\cos a$, et que l'on obtient, dans ces conditions, pour $\cos 2a$, une valeur unique, tandis que, $\sin a$ ou $\cos a$ étant donnés, on obtient pour $\sin 2a$ deux valeurs irrationnelles, égales et de signes contraires.

95. Ce résultat est facile à expliquer : Supposons par exemple que l'on se donne $\sin a$; portons sur le diamètre B'B à partir de O, dans le sens convenable, une longueur OQ, égale à la valeur absolue du sinus donné (*fig.* 49), et menons par Q une parallèle au diamètre AA', qui rencontre en M et en M' le cercle trigonométrique; $\sin a$ étant donné, l'arc a est l'un quelconque des arcs qui ont A pour origine et qui sont terminés soit en M, soit en M'; nous devons obtenir les sinus et les cosinus des doubles de tous ces arcs. Considérons d'abord les arcs terminés en M; soit AM le plus petit arc positif terminé en ce point; le double de cet arc, l'origine étant en A, sera terminé en un point N, tel que MN = AM. Pour obtenir les autres arcs terminés en M, il faut augmenter ou diminuer successivement l'arc AM d'une, deux, trois ... circonférences; les doubles de ces arcs s'obtiendront en augmentant ou en diminuant le double AN de l'arc AM, successivement de deux, de quatre, de six ... circonférences, ce qui nous donnera toujours pour extrémité le point N. Ainsi les doubles de tous les arcs terminés en M ont leur extrémité en N.

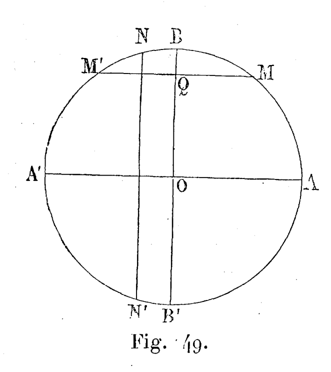


Fig. 49.

Considérons les arcs terminés en M′; parmi ceux-là se trouve l'arc AM′; or, pour amener un mobile de A en M′, on peut l'amener de A en A′, puis le faire rétrograder d'un arc A′M′ égal à AM, mais de sens contraire; l'arc AM′ est donc égal à une demi-circonférence moins l'arc AM; son double vaut une circonférence moins deux fois l'arc AM, c'est-à-dire une circonférence moins l'arc AN: l'extrémité de cet arc N′ est donc symétrique du point N par rapport au diamètre AA′. On voit d'ailleurs facilement que les doubles de tous les arcs terminés en M′ ont leur extrémité en N′.

Dès lors, les doubles des arcs considérés ayant même origine A ont pour extrémités soit N, soit N′, points symétriques par rapport au diamètre AA′; ils ont tous même cosinus, ils ont des sinus égaux et de signes contraires.

96. Pour avoir le cosinus, le sinus, la tangente du triple d'un arc, il suffit, dans les formules (1), (3), (5) du paragraphe précédent, de faire $b = 2a$. Introduisons d'abord cette hypothèse dans la formule (1), nous aurons :

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a \\ &= (\cos^2 a - \sin^2 a) \cos a - 2 \sin^2 a \cos a,\end{aligned}$$

et en remplaçant $\sin^2 a$ par sa valeur $1 - \cos^2 a$,

$$(13) \qquad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

Si dans la formule (3) on fait $b = 2a$, on a de même :

$$\begin{aligned}\sin 3a &= \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a \\ &= (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a + 2 \sin a \cos^2 a,\end{aligned}$$

et en remplaçant $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$,

$$(14) \qquad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

Enfin, on aura de même :

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} = \frac{\operatorname{tg} a + \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{1 - \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}$$

ou enfin :

$$(15) \qquad \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}.$$

Ces formules montrent que cos $3a$ s'exprime en fonction entière et rationnelle de $\cos a$ seulement, que sin $3a$ s'exprime en fonction entière et rationnelle de $\sin a$, enfin que tg $3a$ s'exprime en fonction rationnelle de tg a.

On peut expliquer géométriquement, comme nous l'avons fait (95), pourquoi, cos a étant donné, on trouve pour cos $3a$ une valeur et une seule; pourquoi, sin a étant donné, on trouve pour sin $3a$ une valeur et une seule ; enfin pourquoi, tg a étant donnée, tg $3a$ a une valeur et une seule.

97. Si dans les formules (1), (3), (5), on remplace successivement b par $3a$, $4a$, etc., on pourra obtenir le cosinus, le sinus, la tangente d'un multiple quelconque de l'arc a.

98. **Remarque.** Nous établirons, dans les compléments, par une méthode plus commode, les formules qui donnent $\sin ma$ et $\cos ma$, en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$, $\operatorname{tg} ma$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, m étant un nombre entier quelconque.

99. **Problème.** *Étant donnée* tg a, *calculer* sin $2a$ *et* cos $2a$.

On a :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \operatorname{tg} a . \cos^2 a ;$$

mais (61)

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a};$$

on a donc :

$$(16) \qquad \sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

De même :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a (1 - \operatorname{tg}^2 a),$$

ou enfin :

$$(17) \qquad \cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

Les formules (16) et (17) montrent que sin $2a$ et cos $2a$ s'expriment en fonction rationnelle de tg$a$.

Il est facile de voir pourquoi à une valeur donnée de tg$a$ correspond une seule valeur de sin $2a$ et une seule valeur de cos $2a$; on peut se l'expliquer soit géométriquement, soit trigonométriquement.

100. Considérons le cercle trigonométrique (*fig.* 50) ; portons sur la tangente en A, dans le sens convenable, une longueur AT égale à la valeur absolue de la tangente donnée, tg a. Tous les arcs admettant une tangente égale à tg a, et ayant A pour origine, sont terminés en M ou en M′, extrémités du diamètre qui passe par T; nous devons trouver le sinus et le cosinus des doubles de tous ces arcs.

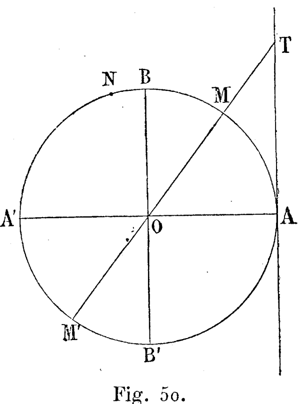


Fig. 50.

Soit AM le plus petit arc positif terminé en M, et soit N l'extrémité d'un arc AN égal à 2AM; on obtient tous les arcs terminés au point M, en augmentant ou en diminuant l'arc AM d'une, deux, trois... circonférences, et par suite on obtient les doubles de tous ces arcs en augmentant ou en diminuant l'arc AN de deux, quatre, six... circonférences, ce qui donne toujours le point N, comme extrémité de tous ces arcs.

Parmi les arcs terminés en M′, se trouve un arc égal à AM augmenté d'une demi-circonférence ; son double est égal à 2AM ou AN augmenté d'une circonférence, et par suite est terminé en N; dès lors les doubles de tous les arcs terminés en M′ ont leur extrémité en N. On voit donc que tous les arcs dont nous devons trouver le sinus et le cosinus, ayant même origine A et même extrémité N, n'admettent pour chacune de ces deux lignes qu'une seule valeur.

101. On peut retrouver les résultats précédents au moyen des formules. Lorsqu'on se donne tg a, tous les arcs correspondant à cette tangente sont compris dans la formule

$$a = k\pi + \alpha,$$

où α est l'un d'eux et où k est un nombre entier quelconque

positif ou négatif. Les doubles de ces arcs seront compris dans la formule

$$2a = 2k\pi + 2\alpha,$$

et l'on voit que tous ces arcs, différant entre eux d'un multiple quelconque de 2π, admettent tous le même sinus, tous le même cosinus. Si donc on donne $\operatorname{tg} a$, on ne doit trouver pour $\sin 2a$ et $\cos 2a$ qu'un seul système de valeurs.

102. Si dans les formules (16) et (17) on remplace a par $\frac{x}{2}$, on a :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \end{aligned} \right.$$

formules qui permettent d'exprimer le sinus et le cosinus d'un arc en fonction rationnelle de la tangente de l'arc moitié; ces formules sont très utiles pour la résolution des problèmes, et en particulier pour la résolution de certaines équations trigonométriques.

§ III. — Division des arcs.

103. Le problème est le suivant : *Étant donné $\sin a$, ou $\cos a$ ou $\operatorname{tg} a$, calculer $\sin \frac{a}{m}$, $\cos \frac{a}{m}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{m}$, m étant un nombre entier positif quelconque*. Ce problème sera traité dans toute sa généralité dans les compléments; nous ne considérerons ici que le cas où $m = 2$.

104. **Connaissant $\cos a$, calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$.** Si dans la relation

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

on remplace a par $\frac{a}{2}$, on a :

$$\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = \cos a.$$

D'autre part, entre $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$, on a la relation

$$\cos^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a}{2} = 1.$$

En ajoutant, puis en retranchant ces deux relations membre à membre, on obtient les deux relations suivantes :

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a$$

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a,$$

d'où l'on déduit :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \\ \sin\frac{a}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \end{aligned} \right.$$

En divisant membre à membre ces deux formules, on en déduit :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

105. Il est facile d'expliquer pourquoi on trouve deux valeurs égales et de signes contraires pour $\cos\frac{a}{2}$ calculé en fonction de $\cos a$. Supposons, pour fixer les idées, que le cosinus donné soit positif, et prenons $OP = \cos a$ (*fig.* 51) ; l'arc a n'est pas déterminé ; c'est l'un quelconque des arcs qui ont le point A pour origine, et se terminent soit en M, soit en M′, les points M et M′ étant sur la perpendiculaire menée par le point P au dia-

mètre AA'. Quand on cherche $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos a$, on doit trouver les cosinus des moitiés de tous les arcs terminés en M et des moitiés de tous les arcs terminés en M'. Soit AM le plus petit arc positif terminé en M, et soit N le milieu de cet arc; on obtient tous les arcs terminés au point M en augmentant ou en diminuant l'arc AM d'une, deux, trois.... circonférences, et, par conséquent, on obtient les moitiés de tous ces arcs en augmentant ou en diminuant l'arc AN d'une, deux, trois..... demi-circonférences. Or, si l'on augmente ou si l'on diminue l'arc AN d'une, deux, trois..... demi-circonférences, l'extrémité de l'arc vient se placer successivement au point N_1, point diamétralement opposé au point N, puis au point N, puis au point N_1, et ainsi de suite. Les moitiés des arcs terminés en M sont donc les arcs terminés en N, et les arcs terminés en N_1. Soit, de même, N' le milieu de l'arc AM', et soit N'_1 le point diamétralement opposé au point N'; les moitiés des arcs terminés en M' sont les arcs terminés en N' et les arcs terminés en N'_1. On doit donc trouver, pour $\cos\frac{a}{2}$, les cosinus de tous les arcs terminés soit en N, soit en N_1, soit en N', soit en N'_1. Les arcs terminés en N et les arcs terminés en N' ont évidemment même cosinus OQ; les arcs terminés en N_1 et les arcs terminés en N'_1 ont même cosinus — OQ' ou — OQ.

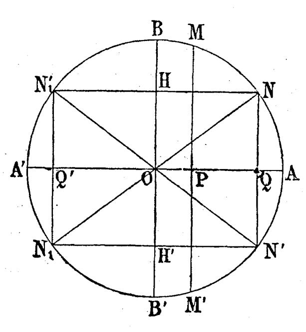


Fig. 51.

On doit de même trouver pour $\sin\frac{a}{2}$ calculé en fonction de $\cos a$, les sinus des moitiés des arcs terminés soit en M, soit en M', c'est-à-dire les sinus des arcs terminés soit en N, soit en N', soit en N_1, soit en N'_1. Les arcs terminés en N et les arcs terminés en N'_1 ont leur sinus égal à OH; les arcs terminés en N' et les arcs terminés en N_1 ont leur sinus égal à — OH' ou à — OH.

On explique de même pourquoi on obtient deux valeurs égales et de signes contraires pour $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ calculée en fonction de $\cos a$.

106. On peut retrouver, au moyen des formules, les résultats précédents : pour cela, remarquons que, $\cos a$ étant donné, les arcs correspondant à ce cosinus sont compris dans la formule $a = 2k\pi \pm \alpha$, α étant l'un quelconque d'entre eux. Nous devons donc trouver les sinus et les cosinus des moitiés de tous ces arcs, c'est-à-dire les sinus et les cosinus des arcs compris dans la formule $\frac{a}{2} = k\pi \pm \frac{\alpha}{2}$.

Considérons d'abord le cas du sinus ; nous aurons, si k est pair :

$$\sin\frac{a}{2} = \sin\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$

et si k est impair :

$$\sin\frac{a}{2} = \sin\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \mp\sin\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire pour $\sin\frac{a}{2}$ deux valeurs égales et de signes contraires.

Dans le cas du cosinus, nous aurons, si k est pair :

$$\cos\frac{a}{2} = \cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

et, si k est impair :

$$\cos\frac{a}{2} = \cos\left(\pi\pm\frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire pour $\cos\frac{a}{2}$ deux valeurs égales et de signes contraires.

107. **Remarque.** Si, en se donnant $\cos a$, on se donne en même temps l'arc a, l'arc $\frac{a}{2}$ étant connu, le sinus et le cosinus de l'arc $\frac{a}{2}$ sont complètement définis ; il faut donc, dans les

formules (1), choisir dans les seconds membres le signe convenable; il suffit, pour cela, de chercher dans quel quadrant tombe l'extrémité de l'arc $\frac{a}{2}$; on en conclura immédiatement le signe du sinus, le signe du cosinus, et par suite le signe qu'il faut choisir devant le radical dans chacune des formules (1).

108. **Connaissant sin a, calculer sin $\frac{a}{2}$ et cos $\frac{a}{2}$.** Si dans la formule

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

nous remplaçons a par $\frac{a}{2}$, nous aurons :

$$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a;$$

on a d'ailleurs la relation :

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1.$$

On en déduit, en ajoutant, puis en retranchant ces relations membre à membre :

$$\left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \sin a$$

$$\left(\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \sin a,$$

ou, en extrayant les racines carrées :

$$(\text{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin a} \\ \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{1 - \sin a}, \end{aligned} \right.$$

d'où enfin :

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \frac{1}{2}\left[\pm \sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}\right] \\ \cos \frac{a}{2} &= \frac{1}{2}\left[\pm \sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}\right]. \end{aligned} \right.$$

Dans les deux formules les signes se correspondent de telle sorte que, devant un même radical, on doit prendre simultanément les signes supérieurs, simultanément les signes inférieurs; on obtient ainsi quatre systèmes de valeurs pour $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$.

109. On explique facilement pourquoi l'on trouve ainsi pour $\sin\frac{a}{2}$, ainsi que pour $\cos\frac{a}{2}$, en fonction de $\sin a$, quatre valeurs deux à deux égales et de signes contraires, et pourquoi les valeurs de $\cos\frac{a}{2}$ sont, dans un autre ordre, les mêmes que les valeurs de $\sin\frac{a}{2}$.

Supposons, pour fixer les idées, le sinus donné positif, et soit $\sin a = \mathrm{OH}$ (*fig.* 52); l'arc a n'est pas déterminé, c'est l'un quelconque des arcs qui ont le point A pour origine, et se terminent soit en M, soit en M′, les points M et M′ étant les extrémités de la corde parallèle au diamètre AA′ menée par le point H. Quand on cherche $\sin\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$, on doit trouver les sinus des moitiés de tous les arcs terminés en M et des moitiés de tous les arcs terminés en M′. Soit AM le plus petit arc positif terminé en M, et soit N le milieu de cet arc; d'après ce que nous avons dit précédemment, les moitiés des arcs terminés en M sont les arcs terminés les uns en N, les autres au point diamétralement opposé N_1. De même, soit N′ l'extrémité de la moitié du plus petit arc positif terminé en M′, les moitiés des arcs terminés en M′ sont les arcs terminés les uns en N′, les autres au point diamétralement opposé N'_1. On doit donc trouver pour $\sin\frac{a}{2}$ les sinus des arcs qui, ayant le point A pour origine, sont terminés soit en N, soit en N′, soit en N_1, soit en N'_1. Or, les arcs terminés en N et les arcs terminés en N_1 ont des sinus égaux et de

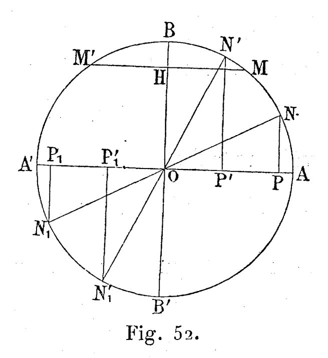


Fig. 52.

signes contraires, savoir $+$ PN, et $-$ PN; les arcs terminés en N′ et les arcs terminés en N'_1 ont aussi des sinus égaux et de signes contraires, savoir $+$ P′N′ et $-$ P′N′. Donc on a pour $\sin\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$ quatre valeurs :

$$+\mathrm{PN},\quad -\mathrm{PN},\quad +\mathrm{P'N'},\quad -\mathrm{P'N'},$$

valeurs qui sont deux à deux égales et de signes contraires.

On doit de même trouver pour $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$ les cosinus des moitiés des arcs terminés soit en M, soit en M′, c'est-à-dire les cosinus des arcs terminés soit en N, soit en N′, soit en N_1, soit en N'_1. Les arcs terminés les uns en N, les autres au point diamétralement opposé N_1, ont pour cosinus les uns $+$ OP, les autres $-$ OP; de même, les arcs terminés les uns en N′, les autres au point diamétralement opposé N'_1, ont pour cosinus, les uns $+$ OP′, les autres $-$ OP′. Donc on a pour $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$ quatre valeurs :

$$+\mathrm{OP},\quad -\mathrm{OP},\quad +\mathrm{OP'},\quad -\mathrm{OP'},$$

valeurs qui sont deux à deux égales et de signes contraires.

Enfin, les quatre valeurs de $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$ sont les mêmes que les quatre valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$.

En effet, si nous désignons par α le plus petit arc positif terminé en M, le plus petit arc positif terminé en M′ est $\pi - \alpha$; le plus petit arc positif terminé en N est $\frac{\alpha}{2}$, et le plus petit arc positif terminé en N′ est $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Le sinus des arcs terminés en N est donc égal au cosinus des arcs terminés en N′, et les quatre valeurs des sinus :

$$+\mathrm{PN},\quad -\mathrm{PN},\quad +\mathrm{P'N'},\quad -\mathrm{P'N'},$$

sont égales aux quatre valeurs du cosinus :

$$+\mathrm{OP'},\quad -\mathrm{OP'},\quad +\mathrm{OP},\quad -\mathrm{OP}.$$

110. On peut retrouver, au moyen des formules, les résultats

précédents. Sin a étant donné, les arcs correspondant à ce sinus sont compris dans les deux formules

$$2k\pi + \alpha, \qquad (2k+1)\pi - \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux; les moitiés seront comprises dans les formules

$$k\pi + \frac{\alpha}{2}, \qquad k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Tous ces arcs ont les mêmes extrémités que les arcs

$$\frac{\alpha}{2}, \qquad \pi + \frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \qquad \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

obtenus en donnant à k dans les formules précédentes successivement les valeurs 0 et 1. Nous devons donc trouver, pour $\sin\frac{a}{2}$, quatre valeurs, et quatre valeurs seulement :

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\frac{\alpha}{2} \\ &\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2} \\ &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \\ &\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}; \end{aligned}\right.$$

ces valeurs, comme on le voit, sont deux à deux égales et de signes contraires.

Nous devons de même trouver, pour $\cos\frac{a}{2}$, quatre valeurs, et quatre valeurs seulement :

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\frac{\alpha}{2} \\ &\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2} \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \\ &\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}; \end{aligned}\right.$$

on voit que ces valeurs sont deux à deux égales et de signes contraires, et de plus que les quatre valeurs de $\cos\frac{a}{2}$ sont égales aux quatre valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ rangées dans un ordre convenable.

111. **Remarque.** Si l'on veut appliquer les formules (A) pour calculer le sinus et le cosinus de la moitié d'un arc donné a, en fonction du sinus de cet arc, il est clair que l'arc $\frac{a}{2}$ étant parfaitement déterminé, le sinus et le cosinus de cet arc admettent chacun une seule valeur ; il faut donc choisir, parmi les quatre valeurs données par les formules précédentes pour $\sin\frac{a}{2}$ et pour $\cos\frac{a}{2}$, celles qui conviennent à la question. On y arrive aisément en se reportant aux formules (A)

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1+\sin a}\\ &\sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\sin a}. \end{aligned}\right.$$

D'après la grandeur de l'arc donné a, et par suite de l'arc $\frac{a}{2}$, on détermine *à priori* les signes des quantités

$$\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\quad \text{et}\quad \sin\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2},$$

et, par suite, les signes qu'il faut prendre devant les radicaux dans les formules (A); on en déduit sans aucune ambiguïté la valeur de $\sin\frac{a}{2}$ et celle de $\cos\frac{a}{2}$.

112. **Exemples.** 1° Soit $a=\frac{\pi}{6}$. On a $\frac{a}{2}=\frac{\pi}{12}$; le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{12}$ sont positifs ; de plus, l'arc $\frac{\pi}{12}$ étant moindre que $\frac{\pi}{4}$, le sinus est moindre que le cosinus. Donc, $\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$ est

positif, tandis que $\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$ est négatif; on a donc :

$$\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = +\sqrt{1 + \sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12} = -\sqrt{1 - \sin\frac{\pi}{6}},$$

et on en déduit :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\frac{\pi}{6}} - \sqrt{1 - \sin\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\frac{\pi}{6}} + \sqrt{1 - \sin\frac{\pi}{6}}\right].$$

2° Soit encore $a = \frac{2\pi}{3}$. On a $\frac{a}{2} = \frac{\pi}{3}$; le sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ sont positifs, et l'arc étant plus grand que $\frac{\pi}{4}$, le sinus est plus grand que le cosinus; donc on a

$$\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = +\sqrt{1 + \sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = +\sqrt{1 - \sin\frac{2\pi}{3}},$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{1 - \sin\frac{2\pi}{3}}\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \sin\frac{2\pi}{3}} - \sqrt{1 - \sin\frac{2\pi}{3}}\right].$$

113. **Connaissant tg a, calculer tg $\frac{a}{2}$.**

Si, dans la formule

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$$

on remplace a par $\frac{a}{2}$, on a :

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}};$$

ou bien, en mettant cette équation sous forme entière, et en ordonnant par rapport à $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, on a l'équation du second degré :

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0.$$

On peut remarquer que cette équation admet toujours deux racines réelles, dont le produit est -1. Ces racines sont

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}.$$

114. Il est facile d'expliquer *à priori* pourquoi l'on a pour $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ deux valeurs et deux valeurs dont le produit est -1. En effet, soit AT la tangente donnée supposée positive (*fig.* 53); l'arc a n'est pas déterminé; c'est l'un quelconque des arcs qui, ayant le point A pour origine, sont terminés soit à l'une, soit à l'autre des extrémités M et M' du diamètre qui passe par le point T. Quand on cherche $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, on doit trouver les tangentes des moitiés des arcs terminés en M et des moitiés des arcs terminés en M'. Soit N le milieu de l'arc AM, et soit N_1 le point diamétralement opposé au point N; les moitiés des arcs termi-

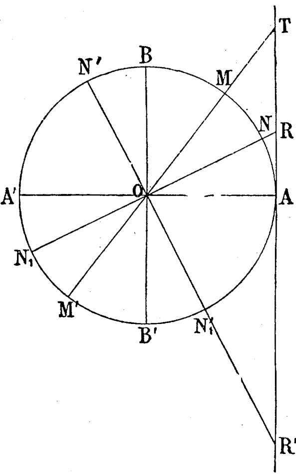


Fig. 53.

nés en M sont terminées en N ou en N_1. Soit N′ le milieu de l'arc AM′, et soit N'_1 le point diamétralement opposé au point N′ ; les moitiés des arcs terminés en M′ sont terminées ou en N′ ou en N'_1. On obtient donc, pour $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, les tangentes de tous les arcs terminés en N, en N_1, en N′ et en N'_1. Remarquons que les points N et N′ étant situés forcément de part et d'autre du diamètre BB′, et les arcs AN et AN′ étant moindres que π, les extrémités R et R′ des tangentes de ces arcs sont de part et d'autre du point A ; leurs tangentes sont donc de signes contraires. Les arcs terminés en N ou en N_1 ont même tangente AR ; les arcs terminés en N′ ou en N'_1 ont même tangente — AR′. D'ailleurs, l'arc AN′ étant égal à $AN + \frac{\pi}{2}$, l'angle ROR′ est droit, et dans le triangle ROR′ on a

$$AR \times AR' = \overline{OA}^2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$AR \times (-AR') = -1.$$

115. Les mêmes propriétés se retrouvent au moyen des formules. En effet, $\operatorname{tg} a$ étant donnée, les arcs correspondants sont compris dans la formule $k\pi + \alpha$, α étant l'un quelconque d'entre eux ; leurs moitiés sont comprises dans la formule $\frac{k\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Comme tous les arcs qui diffèrent d'un multiple quelconque de π ont la même tangente, tous ces arcs ont les mêmes tangentes que les arcs

$$\frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},$$

obtenus en donnant à k dans les formules précédentes successivement les valeurs 0 et 1. Nous devons donc trouver pour $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ les deux seules valeurs distinctes

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\cot\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire deux valeurs, et deux valeurs telles que leur produit est égal à -1, puisque l'on a $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} . \cot\frac{\alpha}{2} = 1$.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. Exprimer $\cot(a+b)$ et $\cot(a-b)$ en fonction de $\cot a$ et de $\cot b$.

2. Démontrer les formules

$$\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b),$$
$$\cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \cos(a+b)\cos(a-b).$$
$$\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}.$$

3. Démontrer les formules

$$\sin a\sin(b-c) + \sin b\sin(c-a) + \sin c\sin(a-b) = 0.$$
$$\cos a\sin(b-c) + \cos b\sin(c-a) + \cos c\sin(a-b) = 0.$$

4. Démontrer les formules

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2},$$
$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$
$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c},$$

et examiner ce que deviennent ces trois formules, quand on suppose $a+b+c=\pi$.

5. Démontrer la formule

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} - \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} - \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b} + \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} - \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \frac{8\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}{\sin 2a\sin 2b\sin 2c}.$$

6. Démontrer les relations

$$\cos b\cos c\sin(b-c) + \cos c\cos a\sin(c-a) + \cos a\cos b\sin(a-b)$$
$$= \sin b\sin c\sin(b-c) + \sin c\sin a\sin(c-a) + \sin a\sin b\sin(a-b),$$

$$\sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a) + \sin(a+b)\sin(a-b) = 0.$$

7. Démontrer que, si α, β et θ sont trois angles tels que l'on ait

$$\alpha + \beta = \theta,$$

on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = \sin^2\theta.$$

8. Les angles a, b, c satisfaisant à la relation $a+b+c=\pi$, démontrer les relations

$$\sin 2a \sin 2b + \sin 2b \sin 2c + \sin 2c \sin 2a = \sin a \sin(2c-a) + \sin b \sin(2a-b) + \sin c \sin(2b-c),$$
$$\cos 2a \cos 2b + \cos 2b \cos 2c + \cos 2c \cos 2a = \cos a \cos(2c-a) + \cos b \cos(2a-b) + \cos c \cos(2b-c).$$

9. Démontrer les formules

$$\sin 3a \sin^3 a + \cos 3a \cos^3 a = \cos^3 2a,$$
$$4 \cos 3a \sin^3 a + 4 \sin 3a \cos^3 a = 3 \sin 4a.$$

10. Sachant que l'on a

$$\cos \omega = \frac{\cos \theta - e}{1 - e \cos \theta},$$

calculer $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

11. Calculer, par la méthode de substitution, les valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ et de $\cos\frac{a}{2}$, fournies par les deux équations :

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1$$
$$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a,$$

et démontrer que les valeurs ainsi obtenues sont équivalentes aux formules établies au n° 108.

12. Exprimer $\cos\frac{a}{4}$ en fonction de $\cos a$, et démontrer trigonométriquement et géométriquement que l'on doit trouver pour $\cos\frac{a}{4}$ quatre valeurs en fonction de $\cos a$.

13. Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ connaissant, soit $\sin a$, soit $\cos a$, soit $\sin a$ et $\cos a$; expliquer pourquoi l'on doit trouver pour $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, dans les deux premiers cas deux valeurs, dans le dernier cas une seule valeur.

14. Démontrer les formules

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}{}^{1};$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8},$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

15. Sachant que $\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{tg} b$ sont les deux racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, calculer, en fonction de p et de q, la valeur de l'expression

$$\sin^2(a+b) + p\sin(a+b)\cos(a+b) + q\cos^2(a+b).$$

(Baccalauréat, Paris.)

16. Sachant que l'angle α est déterminé par l'équation

$$B\operatorname{tg}^2\alpha + (A - C)\operatorname{tg}\alpha - B = 0,$$

calculer, en fonction de A, B et C, les quantités

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha.$$

17. Étant donnée l'équation

$$\sin 2a . x^2 - 2(\sin a + \cos a)x + 2 = 0,$$

former l'équation du second degré qui a pour racines les carrés des racines de l'équation proposée, et résoudre l'équation obtenue.

(Concours général, 1865.)

18. Vérifier la relation

$$\operatorname{tg} x = \cot x - 2\cot 2x,$$

et en déduire une formule donnant la somme

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

CHAPITRE IV

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

§ I. Principes relatifs à la construction des tables trigonométriques. — § II. Disposition et usage des tables.

116. Pour faire usage des lignes trigonométriques, il faut pouvoir, un arc étant donné, déterminer ses lignes trigonométriques, et réciproquement, une ligne trigonométrique étant donnée, déterminer les arcs qui correspondent à cette ligne. Il n'existe aucune formule qui permette de résoudre ce problème à l'aide d'un nombre limité d'opérations élémentaires, aussi a-t-on dû construire des tables où sont inscrites les valeurs des lignes trigonométriques de certains arcs convenablement choisis. Ces tables contiennent les lignes trigonométriques des arcs de $10''$ en $10''$, depuis 0° jusqu'à 90° ; il est inutile d'y introduire des arcs négatifs et des arcs supérieurs à 90°, parce qu'à un arc quelconque correspond un arc compris entre 0° et 90° qui, aux signes près, a les mêmes lignes trigonométriques. Pour les arcs intermédiaires, on calcule approximativement leurs lignes trigonométriques par l'emploi des parties proportionnelles, comme on le fait pour les logarithmes des nombres non compris dans les tables. Nous allons expliquer comment on pourrait calculer les lignes trigonométriques des arcs de $10''$ en $10''$ de 0° à 90°.

§ I. — Principes relatifs a la construction des tables trigonométriques.

117. **Théorème.** *Un arc* AM, *positif et moindre que* $\frac{\pi}{2}$, *est compris entre son sinus et sa tangente.*

Menons la corde MM′ perpendiculaire au diamètre OA, et

menons les tangentes au cercle aux points M et M′ (*fig.* 54) ; ces tangentes rencontrent le diamètre AA′ en un même point S. L'arc convexe MAM′ est évidemment plus grand que la corde MM′, et plus petit que la ligne brisée MSM′ qui l'enveloppe. On a donc :

$$\mathrm{MPM'} < \text{arc}\ \mathrm{MAM'} < \mathrm{MS} + \mathrm{M'S},$$

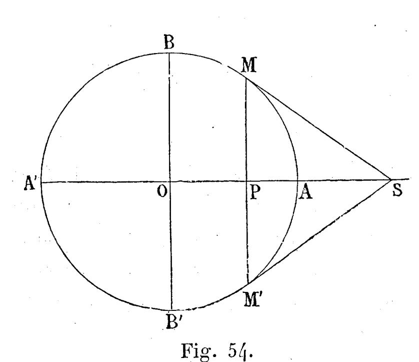


Fig. 54.

ou en divisant par 2 :

$$\mathrm{MP} < \text{arc}\ \mathrm{AM} < \mathrm{MS},$$

c'est-à-dire que l'arc AM est compris entre son sinus MP et sa tangente MS.

En désignant par x un arc quelconque, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

118. Si l'on divise ces trois quantités par $\sin x$ qui est positif, les quotients sont rangés dans le même ordre de grandeur, et l'on a :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Si l'arc x diminue et tend vers 0, $\cos x$ tend vers 1, et par conséquent *lorsque l'arc tend vers* 0, *le rapport de l'arc au sinus de cet arc tend vers l'unité.*

119. Il suit de là que, lorsque l'arc est très petit, il diffère peu de son sinus, et par suite, qu'on peut prendre l'arc lui-même pour une valeur approchée de son sinus. — Le théorème qui suit donne d'ailleurs une limite de l'erreur commise en opérant ainsi.

120. **Théorème.** *Le sinus d'un arc x, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, est compris entre x et $x - \frac{x^3}{4}$.*

On a, en effet :

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$



ou, en multipliant de part et d'autre par $2\cos^2\frac{x}{2}$,

$$x\cos^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

et, en remplaçant $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ par $\sin x$, $\cos^2\frac{x}{2}$ par $1-\sin^2\frac{x}{2}$,

$$x\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right) < \sin x.$$

Si, dans cette inégalité, on remplace $\sin\frac{x}{2}$ par une quantité plus grande $\frac{x}{2}$, on diminue le premier membre et l'on a, à fortiori :

$$x\left(1-\frac{x^2}{4}\right) < \sin x,$$

ou

$$x-\frac{x^3}{4} < \sin x.$$

Comme d'ailleurs x est plus grand que $\sin x$, on a bien :

$$x-\frac{x^3}{4} < \sin x < x.$$

Il suit de là que si l'on prend pour le sinus d'un arc x, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, l'arc lui-même, on commet une erreur moindre que $\frac{x^3}{4}$.

121. **Théorème.** *Le cosinus d'un arc x, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, est compris entre $1-\frac{x^2}{2}$ et $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}$.*

En effet, on a :

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2};$$

ou, en remplaçant $\cos^2 \frac{x}{2}$ par $1 - \sin^2 \frac{x}{2}$,

$$(1) \qquad \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Or, d'après le théorème précédent, on a

$$\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32} < \sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}.$$

Si, dans le second membre de la relation (1), on remplace $\sin \frac{x}{2}$ par la quantité plus grande $\frac{x}{2}$, on diminue ce second membre; et, par conséquent, on a :

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Si, au contraire, on remplace, dans le second membre de l'équation (1), $\sin \frac{x}{2}$ par la quantité plus petite $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}$, on augmente le second membre, et, par conséquent, on a :

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{2x^6}{32^2},$$

et, à plus forte raison,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

On a donc, en réunissant ces deux inégalités :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Il suit de là que si l'on prend $1 - \frac{x^2}{2}$ pour la valeur du cosinus d'un arc x positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, on commet une erreur plus petite que $\frac{x^4}{16}$.

122. Les deux théorèmes suivants permettent de resserrer davantage les limites qui comprennent $\sin x$ et $\cos x$.



123. **Théorème.** *Le sinus d'un arc x, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, est compris entre x et $x - \frac{x^3}{6}$.*

Dans la formule qui donne $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$,

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

remplaçons a par $\frac{x}{3}$; nous aurons :

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3};$$

mais $\sin\frac{x}{3}$ est plus petit que $\frac{x}{3}$; si donc dans le second membre de l'égalité précédente on remplace $\sin^3\frac{x}{3}$ par $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ qui est plus grand, on diminue le second membre et on a :

$$\sin x > 3\sin\frac{x}{3} - 4\cdot\frac{x^3}{3^3}.$$

Dans cette inégalité, remplaçons x successivement par x, $\frac{x}{3}$, ... $\frac{x}{3^{n-1}}$, nous aurons les n inégalités :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin x > 3\sin\frac{x}{3} - 4\frac{x^3}{3^3} \\
\sin\frac{x}{3} > 3\sin\frac{x}{3^2} - 4\frac{x^3}{3^6} \\
\sin\frac{x}{3^2} > 3\sin\frac{x}{3^3} - 4\frac{x^3}{3^9} \\
\dots\dots\dots\dots \\
\sin\frac{x}{3^{n-1}} > 3\sin\frac{x}{3^n} - 4\frac{x^3}{3^{3n}}.
\end{array}\right.$$

Ajoutons membre à membre ces inégalités, après les avoir multipliées respectivement par 1, 3, 3^2... 3^{n-1}; nous aurons, en supprimant de part et d'autre les termes qui se détruisent :

$$(1) \quad \sin x > 3^n \sin\frac{x}{3^n} - 4x^3\left[\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}}\right].$$

La quantité entre crochets est la somme des termes d'une pro-

gression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{3^2}$, et si n croît indéfiniment, cette quantité entre crochets tend vers $\dfrac{\frac{1}{3^3}}{1-\frac{1}{3^2}}$ ou $\frac{1}{3.8}$. Donc le second terme du deuxième membre tend vers $\frac{4x^3}{3\times 8}$ ou $\frac{x^3}{6}$. Quant au premier terme, on peut l'écrire :

$$x.\frac{3^n}{x}\sin\frac{x}{3^n} \quad \text{ou} \quad x.\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}};$$

si n croît indéfiniment, $\frac{x}{3^n}$ tendant vers zéro, le rapport $\dfrac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}$ du sinus à l'arc tend vers 1, et l'expression considérée tend vers x. Ainsi, si n croît indéfiniment, l'inégalité (1) qui est vérifiée, quelque grand que soit n, donne :

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

On a d'ailleurs $x > \sin x$; on a donc la double inégalité

$$(2) \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,$$

qu'il s'agissait de démontrer.

124. **Théorème.** *Le cosinus d'un arc x, positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, est compris entre* $1-\frac{x^2}{2}$ *et* $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

On a, en effet :

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

ou, en remplaçant $\cos^2\frac{x}{2}$ par $1-\sin^2\frac{x}{2}$,

(3) $$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Or, d'après le théorème précédent, on a la double inégalité

$$\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}.$$

Si, dans le second membre de la relation (3), on remplace $\sin\frac{x}{2}$ par la quantité plus grande $\frac{x}{2}$, on diminue ce second membre, et par conséquent on a :

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Si, au contraire, on remplace, dans le second membre de cette même relation (3), $\sin\frac{x}{2}$ par la quantité plus petite $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$, on augmente ce second membre, et par conséquent on a :

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2$$

ou

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{2x^6}{48^2},$$

et, à plus forte raison,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

On a donc, en réunissant ces deux inégalités :

(4) $$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Il résulte de là que, si l'on prend $1 - \frac{x^2}{2}$ pour la valeur du cosinus d'un arc x positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, on commet une erreur plus petite que $\frac{x^4}{24}$.

125. Appliquons les deux premiers théorèmes (nos 120 et 121) au calcul du sinus et du cosinus d'un arc de $10''$.

Dans un cercle de rayon 1, la longueur d'un arc de 1° est $\frac{\pi}{180}$; par conséquent, la longueur d'un arc de 10″ est $\frac{\pi}{180 \times 60 \times 6}$ ou $\frac{\pi}{64800}$. En effectuant la division, on trouve que

$$\text{arc } 10'' = 0,000\,048\,481\,368\,1$$

plus une fraction moindre que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$.

Pour obtenir sin 10″, il faudrait de la valeur exacte de l'arc de 10″ retrancher une quantité moindre que $\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4}$. Or, arc 10″ est moindre que $\frac{5}{10^5}$; $\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4}$ est moindre que $\frac{125}{4.10^{15}}$, et, à plus forte raison, moindre que $\frac{4}{10^{14}}$, ou moindre qu'une demi-unité du treizième ordre décimal. Donc, si l'on prend pour sin 10″ la valeur

$$0,000\,048\,481\,368\,1$$

on commet une erreur moindre que la différence des deux erreurs précédentes et par suite moindre que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$, c'est-à-dire une erreur qui ne peut porter que sur la quatorzième décimale.

Pour obtenir cos 10″ nous prendrons la valeur approchée par défaut $1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2}$. L'erreur ainsi commise sur le cosinus sera moindre que $\frac{1}{16}(\text{arc } 10'')^4$, et, par conséquent, moindre que $\frac{4}{10^{19}}$ ou que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{18}}$; mais d'autre part :

$$(\text{arc } 10'')^2 = 0,000\,000\,002\,350\,443\,052\,8$$

plus une fraction moindre que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{19}}$; on a par suite :

$$\frac{(\text{arc } 10'')^2}{2} = 0,000\,000\,001\,175\,221\,526\,4$$

$$1 - \frac{(\text{arc } 10'')^2}{2} = 0,999\,999\,998\,824\,778\,473\,6$$

à moins de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{19}}$ par excès; si donc l'on prend pour cos 10″ la valeur approchée

$$\cos 10'' = 0,999\,999\,998\,824\,778\,473$$

on commet une erreur moindre que la différence des erreurs précédentes, par suite moindre que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{18}}$, c'est-à-dire une erreur qui ne peut porter que sur la dix-neuvième décimale.

126. **Calcul des sinus et des cosinus des arcs de 10″ en 10″.** Nous avons vu que

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b; \end{cases}$$

on en déduit en ajoutant :

$$(1) \qquad \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b.$$

De même, des deux formules

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \end{cases}$$

on déduit, par addition :

$$(2) \qquad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

Supposons dans ces formules b égal à 10″, et remplaçons a par m10″; les formules (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} \sin(m+1)\,10'' + \sin(m-1)\,10'' = 2 \sin m\,10'' \cos 10'' \\ \cos(m+1)\,10'' + \cos(m-1)\,10'' = 2 \cos m\,10'' \cos 10'', \end{cases}$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} \sin(m+1)\,10'' = 2 \cos 10''.\sin m\,10'' - \sin(m-1)\,10'' \\ \cos(m+1)\,10'' = 2 \cos 10''.\cos m\,10'' - \cos(m-1)\,10''. \end{cases}$$

Ces formules donneront $\sin(m+1)\,10''$ et $\cos(m+1)\,10''$, si l'on connaît $\sin m10''$, $\sin(m-1)\,10''$, $\cos m10''$, $\cos(m-1)\,10''$ et cos 10″. Or si on donne à m successivement les valeurs entières 1, 2, 3..., comme on connaît sin 10″ et cos 10″, les formules (3) permettront de calculer sin 20″, cos 20″; sin 30″, cos 30″; sin 40″, cos 40″, etc.

Remarquons qu'à chaque fois nous devrons multiplier le sinus et le cosinus précédents par $2\cos 10''$; or $\cos 10''$ est très voisin de 1, comme on l'a vu :

$$\cos 10'' = 0,999\,999\,998\,824\,778\,473\,\ldots\ldots;$$

$2\cos 10''$ est très voisin de 2, et les chiffres, après la virgule, contiendront un certain nombre de 9 ; par suite cette multiplication sera longue et pénible.

Pour éviter ces longs calculs, et pour obtenir plus rapidement les sinus et les cosinus cherchés, posons :

$$2\cos 10'' = 2 - k;$$

k est une quantité connue très petite, 0, 000 000 002 350 4..., et la multiplication par k se fera très simplement. Les formules (3) deviennent alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\sin(m+1)\,10'' = (2-k)\sin m\,10'' - \sin(m-1)\,10''\\ \cos(m+1)\,10'' = (2-k)\cos m\,10'' - \cos(m-1)\,10''\end{array}\right.$$

ou encore

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\sin(m+1)10'' - \sin m10'' = \sin m10'' - \sin(m-1)10'' - k\sin m10''\\ \cos(m+1)10'' - \cos m10'' = \cos m10'' - \cos(m-1)10'' - k\cos m10''.\end{array}\right.$$

Ces formules (4) sont dues à Thomas Simpson, et elles montrent :

1° Que la différence entre deux sinus consécutifs s'obtient en retranchant de la différence des deux sinus précédents le produit par k du sinus précédent ;

2° Que la différence entre deux cosinus consécutifs s'obtient en retranchant de la différence des deux cosinus précédents le produit par k du cosinus précédent.

Si dans ces formules (4) on donne à m les valeurs entières successives 1, 2, 3, ..., on obtient les formules suivantes :

$$\begin{array}{l}\sin 20'' - \sin 10'' = \sin 10'' \qquad\qquad - k\sin 10''\\ \cos 20'' - \cos 10'' = \cos 10'' - 1 \qquad - k\cos 10''\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\sin 30'' - \sin 20'' = \sin 20'' - \sin 10'' - k\sin 20''\\ \cos 30'' - \cos 20'' = \cos 20'' - \cos 10'' - k\cos 20''\end{array}$$



$$\sin 40'' - \sin 30'' = \sin 30'' - \sin 20'' - k \sin 30''$$
$$\cos 40'' - \cos 30'' = \cos 30'' - \cos 20'' - k \cos 30''$$
. . . .

qui permettent de calculer de proche en proche les sinus et les cosinus des arcs de 10″ en 10″.

On s'arrêtera à l'arc de 45°, car le sinus d'un arc plus grand que 45° est le cosinus d'un arc plus petit que 45°, et réciproquement. La table des sinus et des cosinus étant formée, on peut en déduire une table des tangentes et des cotangentes.

127. On simplifie les calculs à partir de 30°. En effet, le sinus de 30° est la moitié de la corde d'un arc de 60° dans une circonférence de rayon 1, c'est-à-dire la moitié du côté d'un hexagone régulier inscrit; on aura donc $\sin 30° = \frac{1}{2}$; dès lors:

$$\sin(30° + a) + \sin(30° - a) = 2 \sin 30° \cos a = \cos a$$
$$\cos(30° + a) - \cos(30° - a) = -2 \sin 30° \sin a = -\sin a,$$

d'où

$$\begin{cases} \sin(30° + a) = \cos a - \sin(30° - a) \\ \cos(30° + a) = \cos(30° - a) - \sin a. \end{cases}$$

Remplaçons dans ces formules a par $m 10''$, nous aurons :

$$(5) \quad \begin{cases} \sin(30° + m 10'') = \cos m 10'' - \sin(30° - m 10'') \\ \cos(30° + m 10'') = \cos(30° - m 10'') - \sin m 10''; \end{cases}$$

dans ces formules (5), en donnant à m successivement les valeurs entières 1, 2, 3, ..., nous pourrons calculer les sinus et les cosinus des arcs de 10″ en 10″ à partir de 30°, jusqu'à 45°, si nous avons déjà formé la table des sinus et des cosinus des arcs de 10″ en 10″ depuis 0° jusqu'à 30°.

128. **Calcul direct des sinus et des cosinus de certains arcs.** Si l'on calculait réellement les sinus et les cosinus des arcs de 10″ en 10″, par le procédé que nous venons d'expliquer, une erreur faite dans le cours des opérations rendrait inexacts tous les résultats subséquents. Il importe donc d'établir directement les sinus et les cosinus de certains arcs, afin d'avoir des points de repère qui permettent de vérifier l'exactitude des calculs qui

ont été faits, et d'évaluer avec quelle approximation les résultats ont été obtenus.

On reconnaît immédiatement sur la figure que

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On vient de voir que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. On en conclut que

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a établi (*Cours de géométrie élémentaire*, n° 356) que le côté d'un décagone régulier convexe, inscrit dans un cercle de rayon 1, est égal à $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Or, l'arc sous-tendu par ce côté étant un arc de 36°, la moitié du côté de ce décagone régulier inscrit est le sinus de 18°. On a donc :

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

On en déduit :

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

On pourrait encore, connaissant cos 18°, calculer sin 9° et cos 9°, en employant les formules

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \qquad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}.$$

Puis, connaissant les sinus et les cosinus des arcs de 9° et de 18°, on calculerait, de proche en proche, les sinus et les cosinus des arcs de 9° en 9°.

129. **Tables des logarithmes des lignes trigonométriques.** La plupart des calculs trigonométriques se font par logarithmes ; c'est pourquoi dans les tables, au lieu des lignes trigonométriques, on inscrit les logarithmes de ces lignes. On comprend qu'avec une table des sinus et des cosinus des arcs de 10″ en 10″

de 0° à 90°, il serait facile de former une table des logarithmes des sinus et des cosinus des mêmes arcs. D'ailleurs, avec cette dernière table, on formerait facilement la table des logarithmes des tangentes et des cotangentes des mêmes arcs; car des formules

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

on déduit:

$$\log \operatorname{tg} x = \log \sin x - \log \cos x$$

et

$$\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x.$$

Mais les logarithmes des lignes trigonométriques des arcs de 10″ en 10″ ont été calculés par des procédés beaucoup plus expéditifs, que nous ne pouvons pas exposer ici.

§ II. — Disposition et usage des tables.

130. **Disposition des tables.** Les tables de Callet, de Dupuis, de Schrön, contiennent les logarithmes des sinus et des cosinus, des tangentes et des cotangentes des arcs de 10″ en 10″, depuis 0° jusqu'à 90°. De 0° à 45°, le nombre des degrés est marqué en haut de la page, le nombre des minutes dans la première colonne à gauche, le nombre des dizaines de secondes dans la colonne suivante; les logarithmes des sinus sont inscrits dans la colonne intitulée *sinus*, les logarithmes des cosinus dans la colonne intitulée *cosinus;* il en est de même pour les logarithmes des tangentes et des cotangentes. La lecture se fait de haut en bas. De 45° à 90°, la table revient en quelque sorte sur elle-même; le sinus d'un arc plus petit que 45° est le cosinus d'un arc plus grand que 45°, la tangente d'un arc plus petit que 45° est la cotangente d'un arc plus grand que 45°, et réciproquement. Le nombre des degrés est inscrit en bas de la page, le nombre des minutes dans la dernière colonne à droite, le nombre des dizaines de secondes dans la colonne qui précède; la colonne des sinus devient celle des cosinus, la colonne des tangentes devient celle des cotangentes, et réciproquement. La lecture se fait de bas en haut.



131. Les sinus et les cosinus des arcs de 0° à 90°, les tangentes des arcs de 0° à 45°, les cotangentes des arcs de 45° à 90°, étant moindres que l'unité, ont des logarithmes négatifs. A ces logarithmes entièrement négatifs on substitue, ainsi qu'il a été expliqué en algèbre, des logarithmes dont la partie décimale est positive, et dont la partie entière, ou caractéristique, est seule négative. Dans les tables de Callet et dans celles de Schrön, pour éviter ces caractéristiques négatives, on a augmenté tous ces logarithmes de 10 unités. Cette addition n'était nullement nécessaire, et, dans la pratique, on devra toujours rétablir le logarithme exact. Pour cela, on retranche 10 unités de la caractéristique du logarithme inscrit dans la table, pour le sinus ou le cosinus d'un arc quelconque, pour la tangente d'un arc moindre que 45°, et pour la cotangente d'un arc plus grand que 45°. Les logarithmes des tangentes des arcs plus grands que 45°, et des cotangentes des arcs moindres que 45°, sont inscrits exactement dans les tables. Dans les tables de Dupuis, les logarithmes des lignes trigonométriques sont inscrits avec leurs caractéristiques exactes.

132. On voit de plus dans les tables, à côté de la colonne intitulée *sinus*, une colonne intitulée D, dans laquelle sont inscrites les différences tabulaires, c'est-à-dire les différences qui existent entre deux logarithmes consécutifs. Il en est de même pour la colonne intitulée *cosinus*. On remarque que, pour les sinus, les différences tabulaires sont positives, parce que le sinus augmente en même temps que l'arc, tandis que, pour les cosinus, les différences tabulaires sont négatives, parce que le cosinus diminue quand l'arc augmente.

A côté de la colonne des tangentes, une colonne intitulée $D.c.$ contient de même les différences tabulaires correspondantes; ces différences sont aussi les différences tabulaires pour les cotangentes; seulement les premières sont positives, tandis que les autres sont négatives. On a, en effet :

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h)}{\operatorname{tg} x}=\frac{\cot x}{\cot(x+h)},$$

et, en prenant les logarithmes,

$$\log \operatorname{tg}(x+h)-\log \operatorname{tg} x=\log \cot x-\log \cot(x+h),$$



ce qui montre que la différence des logarithmes des tangentes de deux arcs quelconques est égale et de signe contraire à la différence des logarithmes des cotangentes des mêmes arcs.

Enfin, sur la droite de chaque page, on voit inscrits les produits des différences tabulaires par les nombres

$$0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad \ldots\ldots \quad 0,9,$$

c'est ce qu'on appelle les tables des parties proportionnelles.

133. **Usage des tables.** Pour faire usage des tables, il faut savoir résoudre les deux questions suivantes : 1° Étant donné un angle, trouver le logarithme de chacune de ses lignes trigonométriques ; 2° Connaissant le logarithme d'une ligne trigonométrique d'un angle, trouver cet angle.

134. **Problème I.** *Trouver le logarithme d'une ligne trigonométrique d'un angle donné.*

Si l'angle donné se compose d'un nombre exact de dizaines de secondes, on trouve immédiatement dans la table les logarithmes de ses lignes trigonométriques. Mais, si l'angle donné n'est pas composé d'un nombre exact de dizaines de secondes, on devra faire usage des parties proportionnelles, ainsi que nous allons l'expliquer sur plusieurs exemples.

1° Trouver le logarithme de sin $37°43'56''$. On prend dans la table le logarithme de sin $37°43'50''$; ce logarithme est $\bar{1},7867152$, et la différence tabulaire est de 272. Si l'on augmentait l'angle $37°43'50''$ de $10''$, le logarithme de son sinus augmenterait de 272 unités du septième ordre décimal. On *admet* que l'accroissement du logarithme est sensiblement proportionnel à l'accroissement de l'angle, pourvu que cet accroissement soit plus petit que $10''$; et on dit : à un accroissement de $10''$ dans l'angle correspond, pour le logarithme, un accroissement de 272 unités du septième ordre ; à l'accroissement $6''$ donné à l'angle correspond, pour le logarithme, l'accroissement $272 \times 0,6$ ou 163. On ajoute 163 unités du septième ordre au logarithme de sin $37°43'50''$, et la somme est le logarithme demandé. On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{llr} \log\sin 37°43'50'' = & \bar{1},7867152 & 272\times 0,6 \qquad \Delta = 272 \\ \text{pour} \qquad 6'' & 163 & \\ \hline \log\sin 37°43'56'' = & \bar{1},7867315 & \end{array}$$



On peut simplifier l'écriture, en écrivant immédiatement en place la caractéristique et les quatre premiers chiffres décimaux, puis mettant les trois autres à droite, c'est-à-dire ici 152, avec la différence tabulaire à côté; on écrit au-dessous de 152 la partie complémentaire provenant des parties proportionnelles, ici 163, on tire un trait au-dessous de ce dernier nombre, on fait la somme et on écrit les trois chiffres ainsi obtenus, à la droite des quatre premières décimales du logarithme cherché; on obtient ainsi le logarithme inconnu. Le calcul est alors disposé ainsi qu'il suit :

$$\log \sin 37^\circ 43' 56'' = \bar{1},7867315 \qquad \begin{array}{r} 152 \\ 163 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = 272.$$

2° Trouver le logarithme de cos 21° 32′ 34″,7. Remarquons que, lorsque l'angle croît entre 0° et 90°, le cosinus décroît; on peut employer deux procédés pour trouver le logarithme d'un cosinus.

Premier procédé : On prend dans la table le logarithme du cosinus de l'angle immédiatement inférieur à l'angle donné et contenant un nombre exact de dizaines de secondes, ici le logarithme du cosinus de 21°32′30″. On trouve, pour ce logarithme, $\bar{1},9685534$; la différence tabulaire est 84, ce qui veut dire que si l'on augmentait l'angle 21°32′30″ de 10″, le logarithme de son cosinus diminuerait de 84 unités du septième ordre. On *admet* encore que la diminution du logarithme est sensiblement proportionnelle à l'accroissement de l'angle, pourvu que cet accroissement soit plus petit que 10″ ; et on dit : à l'accroissement 10″ pour l'angle correspond, pour le logarithme, la diminution 84 ; à l'accroissement 4″,7 pour l'angle correspond, pour le logarithme, la diminution $84 \times 0,47 = 39,48$. On retranche 39,5 unités du septième ordre du logarithme de cos 21°32′30″, et la différence est le logarithme cherché. On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{lr} \log\cos 21^\circ 32' 30'' & = \bar{1},9685534 \\ \qquad\qquad 4'',7 & -39,5 \\ \hline \log\cos 21^\circ 32' 34'',7 & = \bar{1},9685494,5 \end{array} \qquad 84 \times 0,47 \qquad \Delta = 84$$

On peut, en abrégeant les calculs comme nous l'avons indiqué plus haut, écrire

$$\log\cos 21^\circ 32' 34'',7 = \bar{1},9685494,5 \qquad \begin{array}{r} 534 \\ -\ 39,5 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = 84.$$

Second procédé : On cherche, dans les tables, le logarithme du cosinus de l'angle immédiatement supérieur à l'angle considéré et renfermant un nombre exact de dizaines de secondes, ici le logarithme du cosinus de $21^\circ 32' 40''$. On trouve pour ce logarithme $\bar{1},9685450$; la différence tabulaire, qu'il faut lire au-dessus, est 84, ce qui veut dire que si l'on diminuait l'angle $21^\circ 32' 40''$ de $10''$, le logarithme de son cosinus augmenterait de 84 unités du septième ordre décimal. On *admet* encore que l'accroissement du logarithme est sensiblement proportionnel à la diminution de l'angle, pourvu que cette diminution soit plus petite que $10''$, et on dit : à la diminution $10''$ pour l'angle correspond, pour le logarithme, l'accroissement 84 ; à la diminution $5'',3$ donnée à l'angle correspond, pour le logarithme, l'accroissement $84 \times 0,53 = 44,5$; on ajoute au logarithme 44,5 unités du septième ordre et on a le logarithme cherché ; les calculs seront disposés comme il suit :

$$\begin{array}{llr} \log\cos 21^\circ 32' 40'' & = \bar{1},9685450 & \qquad 84 \times 5,3 \qquad \Delta = 84 \\ \text{pour} \quad -5'',3 & \qquad\qquad 44,5 & \\ \hline \log\cos 21^\circ 32' 34'',7 & = \bar{1},9685494,5 & \end{array}$$

ou, en disposant les calculs par la méthode abrégée, et supposant qu'on se serve des tables des parties proportionnelles où l'on prend le nombre correspondant à 5 et le nombre correspondant à 3 divisé par 10,

$$\log\cos 21^\circ 32' 34'',7 = \bar{1},9685494,5 \qquad \begin{array}{r} 450 \\ 42 \\ 2,5 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = 84.$$

Le second de ces deux procédés est préférable, parce que, lorsqu'on se sert des tables de parties proportionnelles, il suffit, pour obtenir le logarithme cherché, d'ajouter par une seule

addition au logarithme trouvé dans les tables, les parties complémentaires correspondant aux secondes et aux dixièmes de seconde, tandis que dans le premier procédé on serait conduit à deux soustractions successives ou à une addition suivie d'une soustraction.

3° Trouver le logarithme de tg $83°7'16'',4$. On prend dans la table le logarithme de tg $83°7'10''$; l'angle étant plus grand que $45°$, il faut lire le nombre de degrés au bas de la page, et prendre les minutes et les secondes sur la droite. On trouve ainsi pour le logarithme 0,9184044, et pour la différence tabulaire, qu'il faut lire en montant, 1771.

Si l'angle $83°7'10''$ augmente de $10''$, le logarithme de sa tangente augmente de 1771 unités du septième ordre décimal. On *admet* encore que l'accroissement du logarithme de la tangente est proportionnel à l'accroissement de l'angle, pourvu que cet accroissement soit moindre que $10''$, et par suite que si l'on augmente l'angle de $6'',4$, le logarithme de la tangente augmente de $1771 \times 0,64$ ou de 1133,4 unités du septième ordre. On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{tg} 83°7'10'' & = 0,9184044 \\ \qquad\qquad 6'',4 & \qquad\quad 1133,4 \\ \hline \log \operatorname{tg} 83°7'16'',4 & = 0,9185177,4 \end{array} \qquad 1771 \times 0,64 \qquad \Delta = 1771$$

ou, d'une manière abrégée :

$$\log \operatorname{tg} 83°7'16'',4 = 0,9185177,4 \qquad \begin{array}{r} 4044 \\ 1133,4 \\ \hline \end{array} \qquad \Delta = 1771.$$

4° Trouver le logarithme de cot $68°52'47'',3$. On peut suivre, comme pour le logarithme d'un cosinus, deux procédés; employons le second, qui est préférable. On prend dans la table le logarithme de cot $68°52'50''$; on trouve pour ce logarithme $\bar{1},5868773$, et pour la différence tabulaire, qu'il faut lire en descendant, 626; ce qui veut dire que si l'angle $68°52'50''$ diminue de $10''$, le logarithme de sa cotangente augmente de 626 unités du septième ordre décimal. On *admet* encore la proportionnalité entre l'accroissement du logarithme de la cotangente

et la diminution de l'angle, pourvu que cette diminution ne dépasse pas 10″, et on dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{llll} \log\cot 68^\circ 52' 50'' = \bar{1},5868773 & 626\times 0,27 & \Delta = 626 \\ \quad -2'',7 \qquad\qquad 169 & & \\ \hline \log\cot 68^\circ 52' 47'',3 = \bar{1},5868942 & & \end{array}$$

ou, d'une manière abrégée :

$$\begin{array}{lll} \log\cot 68^\circ 52' 47'',3 = \bar{1},5868942 & 8773 & \Delta = 626. \\ & 125,2 & \\ & 43,8 & \\ \end{array}$$

135. **Remarque.** Dans ce qui précède, on admet que l'accroissement donné à un angle est proportionnel à l'accroissement correspondant du logarithme de l'une de ses lignes trigonométriques, pourvu que l'accroissement de l'angle ne surpasse pas 10″. Cela n'est pas rigoureusement exact; mais lorsqu'il s'agit du logarithme du sinus d'un angle plus grand que 5°, ou du logarithme du cosinus d'un angle plus petit que 85°, l'erreur qui en résulte n'affecte pas les 7 premières décimales du logarithme. Il en est de même pour le logarithme de la tangente ou de la cotangente d'un angle compris entre 5° et 85°.

136. Si l'on calculait par le même procédé le logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle plus petit que 5°, l'erreur commise pourrait devenir égale à plusieurs unités du septième ordre décimal. Mais, en tête des tables dont nous venons de parler, se trouvent de petites tables qui contiennent les logarithmes des sinus et des tangentes des arcs, de seconde en seconde, de 0° à 5°, et par suite les logarithmes des cosinus et des cotangentes des arcs, de seconde en seconde, de 85° à 90°. C'est à ces tables qu'il faut avoir recours pour les angles dont nous venons de parler. Comme on n'emploie alors les parties proportionnelles que pour calculer les accroissements des logarithmes qui correspondent à des accroissements d'angle moindres qu'une seconde, il n'en résulte que des erreurs tout à fait négligeables.

137. **Problème II.** *Étant donné le logarithme d'une ligne trigonométrique, trouver l'angle moindre que 90° correspondant.*

1° Soit

$$\log \sin x = \bar{1},7432684.$$

On cherche, dans la table des logarithmes des sinus, celui qui approche le plus, *par défaut*, de $\bar{1},7432684$. On trouve $\bar{1},7432543$ pour $\log \sin 33°37'10''$, et la différence tabulaire est 316; la différence du logarithme de la table au logarithme proposé est 141. Si l'on appelle h le nombre des secondes qu'il faut ajouter à l'angle de la table pour avoir l'angle cherché, on aura, d'après ce qui précède :

$$\frac{h}{10} = \frac{141}{316}, \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{141 \times 10}{316} = 4,4.$$

On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{rl} \log \sin x = & \bar{1},7432684 \\ \log \sin 33°37'10'' = & \underline{\bar{1},7432543} \\ 4'',4 \qquad & 141 \\ x = 33°37'14'',4. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1410 & 316 \\ 1460 & \overline{4,4} \end{array} \qquad \Delta = 316$$

On opérerait de même pour trouver x, connaissant $\operatorname{tg} x$.

2° Soit encore

$$\log \cos x = \bar{1},2742545.$$

On peut employer deux procédés.

Premier procédé. On cherche, dans la table des logarithmes des cosinus, celui qui approche le plus, par défaut, de $\bar{1},2742545$; on trouve $\bar{1},2741587$ pour $\log \cos 79°9'50''$; la différence tabulaire, qu'il faut lire en arrière, est 1100, ce qui veut dire que si on ajoute 1100 unités du septième ordre au logarithme du cosinus, l'angle diminue de 10″; la différence entre le logarithme de la table et le logarithme proposé est 958; en désignant par h le nombre de secondes qu'il faut retrancher de l'angle de la table pour avoir l'angle cherché, on a :

$$\frac{h}{10} = \frac{958}{1100}, \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{9580}{1100} = 8,7.$$

On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{rlll} \log\cos x = & \bar{1},2742545 & 9580 \,|\, 1100 & \\ \log\cos 79^\circ 9' 50'' = & \bar{1},2741587 & 7800 \,|\, 8,7 & \Delta = 1100 \\ -8'',7 & \quad 958 & & \\ x = & 79^\circ 9' 41'',3. & & \end{array}$$

Second procédé. On cherche, dans la table des logarithmes des cosinus, celui qui approche le plus, *par excès*, de $\bar{1},2742545$; on trouve $\bar{1},2742687$, pour $\log\cos 79^\circ 9' 40''$. La différence tabulaire est 1100, ce qui veut dire que si l'on retranche 1100 unités du septième ordre du logarithme du cosinus, l'angle augmente de $10''$; la différence entre le logarithme de la table et le logarithme proposé est 142 ; en désignant par h' le nombre de secondes qu'il faut ajouter à l'angle de la table pour avoir l'angle cherché, on a :

$$\frac{h'}{10} = \frac{142}{1100}, \qquad \text{ou} \qquad h' = \frac{1420}{1100} = 1,3.$$

On dispose les calculs comme il suit :

$$\begin{array}{rlll} \log\cos x = & \bar{1},2742545 & & \\ \log\cos 79^\circ 9' 40'' = & \bar{1},2742687 & 1420 \,|\, 1100 & \Delta = 1100 \\ 1'',3 & \quad -142 & 3200 \,|\, 1,3 & \\ x = & 79^\circ 9' 41'',3. & & \end{array}$$

Le second procédé est préférable, parce que, lorsqu'on se sert des tables de parties proportionnelles pour obtenir les secondes et les dixièmes de seconde, il suffit d'ajouter à l'angle correspondant au logarithme trouvé dans les tables l'angle ainsi calculé, tandis que dans le premier procédé il faut retrancher successivement ces deux parties, ou les ajouter entre elles d'abord et retrancher leur somme.

On opérerait de même pour trouver x, connaissant $\cot x$.

138. Évaluons maintenant l'erreur commise sur un angle quand on déduit cet angle de la valeur connue du logarithme de l'une de ses lignes trigonométriques. Appelons Δ la différence tabulaire qui correspond au logarithme de la ligne tri-

gonométrique considérée; à une variation égale à Δ dans le logarithme de la ligne trigonométrique correspond, dans l'angle, une variation de $10''$, et, par suite, à une variation d'une unité du septième ordre dans le logarithme correspond sensiblement une variation $\frac{10''}{\Delta}$ dans l'angle. Le logarithme étant donné à moins d'une unité du septième ordre, la quantité $\frac{10''}{\Delta}$ est une limite de l'erreur commise en calculant un angle d'après le logarithme de la ligne trigonométrique considérée. Cette limite varie en raison inverse de la différence tabulaire Δ.

139. On reconnaît, à l'inspection de la table, que, pour les sinus, la quantité Δ diminue sans cesse depuis $0°$ jusqu'à $90°$; donc l'erreur que l'on peut commettre, dans le calcul d'un angle donné par le logarithme de son sinus, augmente avec la valeur de cet angle. Pour un angle moindre que $45°$, l'erreur est toujours moindre que 5 centièmes de seconde, pour un angle de $85°$ elle atteint une demi-seconde, et croît très rapidement quand l'angle dépasse $85°$. C'est l'inverse pour les cosinus.

140. Pour les logarithmes des tangentes et des cotangentes, la différence tabulaire décroît de $0°$ à $45°$, et croît de $45°$ à $90°$; il en résulte que la limite de l'erreur $\frac{10''}{\Delta}$ croît de $0°$ à $45°$, puis décroît de $45°$ à $90°$. Le maximum de cette erreur a lieu pour $45°$; il est moindre que 3 centièmes de seconde.

141. Enfin remarquons que, pour un angle donné, la différence tabulaire relative à la tangente est la somme des valeurs absolues des différences tabulaires relatives au sinus et au cosinus; on a, en effet :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{tg}(x+h) = \frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)},$$

$$\log \operatorname{tg} x = \log \sin x - \log \cos x,$$
$$\log \operatorname{tg}(x+h) = \log \sin(x+h) - \log \cos(x+h)$$

et

$$\log \operatorname{tg}(x+h) - \log \operatorname{tg} x = [\log \sin(x+h) - \log \sin x] + [\log \cos x - \log \cos(x+h)]$$

Il en résulte que, pour un angle quelconque compris entre 0° et 90°, la différence tabulaire relative à la tangente est plus grande que la différence tabulaire relative soit au sinus, soit au cosinus, et, par conséquent, qu'un angle est mieux déterminé par le logarithme de sa tangente que par le logarithme soit de son sinus, soit de son cosinus. Il est évident que ce que nous venons de dire pour la tangente s'applique également à la cotangente.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV.

1. Démontrer que l'expression $\frac{\sin x}{x}$ est d'autant plus petite que x est plus petit.

2. Démontrer que, si x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ est la limite vers laquelle tend le produit

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

lorsque le nombre entier n croît indéfiniment.

3. Calculer la valeur de la somme

$$\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^3 3x + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 x \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n}\cos^3 3^n x,$$

et chercher la limite de cette expression lorsque le nombre entier n croît indéfiniment.

4. Démontrer que, si x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$

5. Démontrer que, si x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$x < \frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x.$$

6. Chercher, lorsque h tend vers o, les limites des expressions

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h},\quad \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h},$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg} x}{h},\quad \frac{\cot(x+h)-\cot x}{h},$$

$$\frac{\text{séc}(x+h)-\text{séc}\, x}{h},\quad \frac{\text{cosséc}(x+h)-\text{cosséc}\, x}{h}.$$

7. Chercher, lorsque x tend vers o, la limite de l'expression

$$\frac{\pi \sin \frac{\pi x}{2}}{4x \cos \frac{\pi x}{2}}.$$

8. Chercher, lorsque x tend vers o, la limite de l'expression

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

9. Chercher, lorsque x tend vers o, la limite des expressions

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x},\quad \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

10. Chercher, lorsque h tend vers o, les limites des expressions

$$\frac{\sin 2(a+h)-\sin 2a}{\operatorname{tg}(a+h)-\operatorname{tg} a},\quad \frac{\operatorname{tg}(a+h)-\operatorname{tg} a}{\cos(a+h)-\cos a},\quad \frac{\sin(a+h)-\sin a}{\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{h}{2}\right)-\sin\frac{a}{2}}.$$

11. Chercher, lorsque x tend vers o, la limite de l'expression

$$\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

12. Chercher, lorsque x tend vers 1, la limite de l'expression

$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}.$$

CHAPITRE V

TRANSFORMATIONS ET ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

§ I. Transformations trigonométriques. — § II. Transformations des expressions algébriques au moyen d'angles auxiliaires. — § III. Équations trigonométriques.

§ I. — TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

142. Lorsque l'on doit effectuer des calculs un peu compliqués sur des nombres, il est utile, pour la rapidité et la simplification des opérations, de faire usage des logarithmes; c'est ce que l'on fait en algèbre dans les calculs d'intérêts composés et d'annuités. En trigonométrie, les logarithmes sont sans cesse employés, et c'est pour ce motif que les tables trigonométriques renferment non pas les valeurs des lignes trigonométriques, mais les valeurs des logarithmes de ces lignes. Or on sait qu'une formule n'est calculable par logarithmes qu'autant que, parmi les opérations indiquées, il n'y a ni addition ni soustraction. Nous allons donc nous proposer de montrer comment, dans certains cas, au moyen des formules trigonométriques que nous connaissons déjà, on peut rendre calculables par logarithmes certaines expressions trigonométriques, et comment, dans tous les cas, l'emploi d'angles auxiliaires permet de transformer en produits des expressions algébriques ou trigonométriques.

143. **Problème.** *Transformer en produit une somme ou une différence de deux sinus ou de deux cosinus.*

Des formules

$$(1) \quad \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

on déduit, en ajoutant et en retranchant les deux formules (1)

membre à membre, puis les deux formules (2) membre à membre :

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin(a+b)+\sin(a-b)= & 2\sin a\cos b \\ \sin(a+b)-\sin(a-b)= & 2\cos a\sin b \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos(a+b)+\cos(a-b)= & 2\cos a\cos b \\ \cos(a+b)-\cos(a-b)= & -2\sin a\sin b. \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$a+b=p, \qquad a-b=q,$$

on a :

$$a=\frac{p+q}{2}, \qquad b=\frac{p-q}{2},$$

et, en portant ces valeurs dans les formules précédentes, on obtient les relations :

$$(5)\qquad \sin p+\sin q= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(6)\qquad \sin p-\sin q= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$(7)\qquad \cos p+\cos q= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$(8)\qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Ces formules résolvent la question proposée; elles sont d'un usage très fréquent en trigonométrie; on peut les énoncer comme il suit :

1° *La somme de deux sinus est égale à deux fois le produit du sinus de la demi-somme des arcs par le cosinus de leur demi-différence ;*

2° *La différence de deux sinus est égale à deux fois le produit du cosinus de la demi-somme des arcs par le sinus de leur demi-différence;*

3° *La somme de deux cosinus est égale à deux fois le produit du cosinus de la demi-somme des arcs par le cosinus de leur demi-différence;*

4° *La différence de deux cosinus est égale à moins deux fois le produit du sinus de la demi-somme des arcs par le sinus de leur*

demi-différence, ou, si on remarque qu'en changeant le signe d'un arc on change le signe du sinus, *à deux fois le produit du sinus de la demi-somme des arcs par le sinus de leur demi-différence prise en sens contraire*.

144. **Remarque I.** Les formules (3) et (4) permettent de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de transformer en une somme ou en une différence de sinus ou de cosinus un produit de sinus ou de cosinus.

En échangeant les deux membres de chacune des égalités (3) et (4), on a :

$$(9)\quad \begin{cases} 2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ 2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b) \\ 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b). \end{cases}$$

On voit que le double produit d'un sinus et d'un cosinus provient de la somme ou de la différence de deux sinus, que le double produit de deux cosinus provient de la somme de deux cosinus, enfin que le double produit de deux sinus provient de la différence de deux cosinus.

145. **Remarque II.** Si l'on divise membre à membre les formules (5) et (6), on a :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}},$$

ou bien, en remarquant que $\dfrac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}}$ est égal à $\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}$,

et que $\dfrac{\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p-q}{2}}$ est égal à $\cot\frac{p-q}{2}$ ou à $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}$, on a :

$$(10)\quad \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}.$$

Cette dernière formule nous servira dans la résolution des triangles.

146. **Problème.** *Rendre calculable par logarithmes la somme ou la différence de deux tangentes ou de deux cotangentes.*

Il suffit pour cela de poser :

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b},$$

d'où

$$(11) \qquad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a \pm b)}{\cos a \cos b},$$

et de même

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} \pm \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \sin b \pm \sin a \cos b}{\sin a \sin b},$$

d'où

$$(12) \qquad \cot a \pm \cot b = \frac{\sin (b \pm a)}{\sin a \sin b}.$$

147. Voici encore un certain nombre d'expressions trigonométriques que l'on transforme facilement en produits.

1° $$\sin a + \cos b = \sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$
$$= 2 \sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right]$$
$$= 2 \sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a+b}{2}\right].$$

2° $$\sin a - \cos b = \sin a - \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$
$$= 2 \cos\left[\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2}\right] \sin\left[\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$$
$$= -2 \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2}\right].$$

3° $$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}.$$

4° $$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

5° $$1+\sin a = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

6° $$1-\sin a = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

7° $$\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \text{tg}^2\frac{a}{2}.$$

8° $$\frac{1-\sin a}{1+\sin a} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

9° $$\frac{1-\text{tg}\,a}{1+\text{tg}\,a} = \frac{\text{tg}\frac{\pi}{4}-\text{tg}\,a}{1+\text{tg}\frac{\pi}{4}\text{tg}\,a} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-a\right)$$

en remarquant que $\text{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

148. **Remarque.** Dans tous les exemples examinés jusqu'ici, on a pu rendre calculable, par logarithmes, une somme ou une différence de deux lignes trigonométriques, sans emploi d'angle auxiliaire. On peut, dans certains cas, par exemple lorsque les arcs sont liés entre eux par certaines relations, rendre calculable par logarithmes, sans introduire d'angles auxiliaires, la somme de 3, 4, etc., lignes trigonométriques, ou même des polynômes renfermant ces lignes trigonométriques; c'est ce que nous allons montrer par quelques exemples.

149. **Somme de sinus ou de cosinus d'arcs en progression arithmétique.** Soit à calculer la somme S des n sinus d'arcs en progression arithmétique de raison b :

$$(1)\quad S=\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots\ldots+\sin\left[a+(n-1)b\right].$$

Multiplions les deux membres de la relation (1) par $2\sin\frac{b}{2}$; nous aurons :

$$2S\sin\frac{b}{2} = 2\sin a\sin\frac{b}{2} + 2\sin(a+b)\sin\frac{b}{2} + 2\sin(a+2b)\sin\frac{b}{2} + \ldots\ldots$$
$$+ 2\sin\left[a+(n-1)b\right]\sin\frac{b}{2}.$$

Mais, d'après les formules (9) du n° 144, chaque double produit de deux sinus peut être remplacé par une différence de deux cosinus :

$$2\sin a\sin\frac{b}{2} = \cos\left(a-\frac{b}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{b}{2}\right)$$
$$2\sin(a+b)\sin\frac{b}{2} = \cos\left(a+\frac{b}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{3b}{2}\right)$$
$$2\sin(a+2b)\sin\frac{b}{2} = \cos\left(a+\frac{3b}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{5b}{2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\sin\left(a+(n-1)b\right)\sin\frac{b}{2} = \cos\left(a+\frac{(2n-3)b}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right).$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, et remarquant que, dans le second membre, les termes se détruisent deux à deux, sauf le premier et le dernier, nous aurons :

$$2S\sin\frac{b}{2} = \cos\left(a-\frac{b}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(a+\frac{(n-1)b}{2}\right)\sin\frac{nb}{2},$$

d'où enfin

$$(2) \qquad S = \frac{\sin\left(a+\frac{(n-1)b}{2}\right)\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}.$$

150. On obtient de même la somme S′ des cosinus de ces n arcs en progression arithmétique :

$$(3) \quad S' = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \ldots\ldots + \cos\left[a+(n-1)b\right].$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $2\sin\frac{b}{2}$,

et en remplaçant les doubles produits d'un cosinus et de $\sin\frac{b}{2}$ par une différence de sinus, on obtient, après réduction :

$$2S'\sin\frac{b}{2}=\sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(a+\frac{(n-1)b}{2}\right)\sin\frac{nb}{2},$$

d'où enfin

$$(4)\qquad S'=\frac{\cos\left(a+\frac{(n-1)b}{2}\right)\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}.$$

151. **Problème**. *Rendre calculable par logarithmes l'expression*

$$\sin a+\sin b+\sin c$$

sachant que les angles a, b, c, *sont tels que l'on ait*

$$a+b+c=\pi.$$

Posons :

$$S=\sin a+\sin b+\sin c,$$

et remarquons que de la relation $a+b+c=\pi$, on déduit $c=\pi-(a+b)$ et par suite :

$$\sin c=\sin[\pi-(a+b)]=\sin(a+b);$$

on a donc :

$$S=\sin a+\sin b+\sin(a+b)$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2},$$

ou enfin, en remarquant que $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}$, et que par suite $\sin\frac{a+b}{2}=\cos\frac{c}{2}$,

$$S=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

formule calculable par logarithmes.

152. **Problème.** *Rendre calculable par logarithmes la somme*

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c$$

sachant que la somme $a+b+c=\pi$.

On a :

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c}.$$

Or, $a+b+c$ étant égal à π, $\operatorname{tg}(a+b+c)=0$, et par suite on a :

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b\operatorname{tg} c,$$

formule qui résout la question.

153. **Problème.** *Rendre calculable par logarithmes l'expression*

$$1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

λ, μ, ν *étant trois angles quelconques.*

Posons :

$$S=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

et remarquons que

$$1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu$$

forment les trois premiers termes du produit

$$(1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu);$$

nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}S&=(1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu)-\cos^2\lambda\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\\&=\sin^2\lambda\sin^2\mu-(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)^2\\&=(\sin\lambda\sin\mu-\cos\lambda\cos\mu+\cos\nu)(\sin\lambda\sin\mu+\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\&=\left[\cos\nu-\cos(\lambda+\mu)\right]\left[\cos(\lambda-\mu)-\cos\nu\right],\end{aligned}$$

ou enfin

$$S = 4 \sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\sin\frac{\lambda+\nu-\mu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2};$$

c'est la formule cherchée.

Cette formule nous montre que, si en particulier λ, μ, ν sont les faces d'un trièdre, l'expression S considérée est positive; en effet, dans ce cas, chacun des angles λ, μ, ν est positif, moindre que π, chacun d'eux est moindre que la somme des deux autres, et leur somme est moindre que 2π; dès lors chacun des angles qui entrent sous le signe sinus est supérieur à o et inférieur à π; donc chacun de ces sinus est différent de o et positif, et leur produit est positif.

§ II. — TRANSFORMATIONS DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES AU MOYEN D'ANGLES AUXILIAIRES.

154. On peut, au moyen d'angles auxiliaires, rendre calculable par logarithmes tout polynôme donné; il est clair que toute la question revient à rendre calculable l'ensemble de deux termes, c'est-à-dire une expression de la forme $a \pm b$, où a et b sont des monômes; car ayant substitué un produit à la somme de ces deux termes, on aura remplacé le polynôme proposé par un polynôme ayant un terme de moins; en prenant deux termes de ce nouveau polynôme et les transformant, on obtiendra un nouveau polynôme ayant un terme de moins encore et équivalent au premier, et ainsi de suite.

155. **Problème.** *Rendre calculable par logarithmes l'expression*

$$a \pm b$$

dans laquelle a et b représentent des nombres positifs, et où a est supposé plus grand que b.

1re *solution.* On pose :

$$a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$$

et on introduit un angle auxiliaire φ donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Comme, par hypothèse, $\frac{b}{a}$ est compris entre o et 1, on peut toujours choisir cet angle φ entre o et $\frac{\pi}{4}$.

On se servira d'ailleurs, pour le calcul de cet angle, de la formule

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log b - \log a.$$

Cela posé, on a :

$$a \pm b = a(1 \pm \operatorname{tg} \varphi) = a \frac{\cos \varphi \pm \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Or,

$$\cos \varphi + \sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

$$\cos \varphi - \sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right);$$

donc enfin

$$a + b = \frac{a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi}$$

$$a - b = \frac{a\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi}.$$

On calculera $a + b$ et $a - b$ par logarithmes, à l'aide des formules

$$\log(a + b) = \log a + \frac{1}{2} \log 2 + \log \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \log \cos \varphi,$$

$$\log(a - b) = \log a + \frac{1}{2} \log 2 + \log \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \log \cos \varphi.$$

2e *solution*. On pose encore :

$$a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$$

et on introduit un angle auxiliaire φ donné par la formule

$$\cos \varphi = \frac{b}{a};$$

comme, par hypothèse, $\frac{b}{a}$ est compris entre o et 1, on pourra prendre l'angle φ entre o et $\frac{\pi}{2}$. On calculera cet angle à l'aide de la formule

$$\log\cos\varphi = \log b - \log a.$$

Cela posé, on a :

$$a \pm b = a(1 \pm \cos\varphi);$$

or,

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

on a donc :

$$a + b = 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$a - b = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

et on calculera $a+b$ et $a-b$ par logarithmes, à l'aide des formules

$$\log(a+b) = \log 2 + \log a + 2\log\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\log(a-b) = \log 2 + \log a + 2\log\sin\frac{\varphi}{2}.$$

3e *solution*. Prenons d'abord $a+b$; on a :

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right);$$

posons :

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}};$$

nous pourrons supposer φ entre o et $\frac{\pi}{4}$, et calculer cet angle à l'aide de la formule

$$\log\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a).$$



Nous aurons :

$$a+b=a(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{a}{\cos^2\varphi},$$

d'où

$$\log(a+b)=\log a-2\log\cos\varphi.$$

Prenons maintenant la différence $a-b$; on a :

$$a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right);$$

posons :

$$\sin^2\varphi=\frac{b}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \sin\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}};$$

nous pourrons prendre l'angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et le calculer par la formule

$$\log\sin\varphi=\frac{1}{2}(\log b-\log a).$$

Nous aurons :

$$a-b=a(1-\sin^2\varphi)=a\cos^2\varphi,$$

et nous pourrons calculer $a-b$ par logarithmes à l'aide de la formule

$$\log(a-b)=\log a+2\log\cos\varphi.$$

156. **Problème**. *Rendre calculable par logarithmes*

$$x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

On écrit :

$$x=a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}};$$

on pose :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},$$

et on choisit pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; on calculera cet angle φ par la formule

$$\log\operatorname{tg}\varphi=\log b-\log a.$$

Ceci posé, on a :

$$x = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a}{\cos\varphi},$$

car φ étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est positif, et la formule précédente résout la question.

157. **Problème**. *Rendre calculable par logarithmes*

$$x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

a étant supposé plus grand que b.

On écrit :

$$x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

on remarque que, $\frac{b}{a}$ étant plus petit que 1, on peut poser :

$$\sin\varphi = \frac{b}{a},$$

d'où

$$\log\sin\varphi = \log b - \log a;$$

on prendra pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; on aura alors :

$$x = a\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = a\cos\varphi,$$

formule calculable par logarithmes.

158. **Problème**. *Rendre calculable par logarithmes l'expression*

$$x = a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

où a et b sont des quantités positives données, et où α est un angle également donné.

On écrit :

$$x = a\left[\sin\alpha + \frac{b}{a}\cos\alpha\right],$$

on pose :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

d'où

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log b - \log a,$$

et on prend pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation; on a alors :

$$x = a \left[\sin \alpha + \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha \right] = a \frac{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \varphi}.$$

ou enfin

$$x = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi},$$

formule calculable par logarithmes.

159. **Remarque.** On peut, dans certains cas, grâce à des artifices de calcul, rendre calculable par logarithmes, au moyen d'un seul angle auxiliaire, un polynôme de trois termes, lorsque des mêmes facteurs littéraux se trouvent dans deux des trois termes. C'est ce que montre l'exemple suivant.

160. **Problème.** *Rendre calculable par logarithmes l'expression*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C},$$

où a et b sont des quantités positives données, et où C *est un angle donné moindre que π.*

On remarque, d'une part, que

$$\cos C = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2},$$

que d'ailleurs

$$\cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1;$$

on écrit alors :

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)\left(\cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}\right)}$$

ou, en réunissant les termes en $\cos^2 \frac{C}{2}$ et les termes en $\sin^2 \frac{C}{2}$,

$$x = \sqrt{(a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}}.$$

On est ainsi ramené à une expression connue, contenant deux termes seulement sous le radical. On pose, en appelant a la plus grande des deux quantités a et b,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

et on prend pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; on en déduit :

$$x = (a+b)\sin\frac{C}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

ou

$$x = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\varphi},$$

formule calculable par logarithmes.

161. **Problème.** *Rendre calculables par logarithmes les racines de l'équation du second degré*

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

p et q étant supposés réels et calculables par logarithmes.

Soient x' et x'' les deux racines de cette équation,

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1° Supposons d'abord que ces racines soient imaginaires, c'est-à-dire supposons $\frac{p^2}{4} - q < 0$, ce qui exige $q > 0$. Remarquons que $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est réel et plus petit que 1 en valeur absolue ; car son carré est $\frac{p^2}{4q}$, et de l'inégalité $\frac{p^2}{4} - q < 0$, on déduit, puisque q

est positif, $\frac{p^2}{4q} < 1$. Nous pouvons donc poser :

$$\cos\alpha = -\frac{p}{2\sqrt{q}};$$

cette relation détermine un cosinus ; nous prendrons pour α l'angle positif, moindre que π, qui satisfait à cette relation ; il y en a un et un seul. Dès lors, $\sin\alpha$ étant positif, nous aurons :

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{p^2}{4q}} = \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{\sqrt{q}},$$

et par suite, i désignant l'expression $\sqrt{-1}$,

$$\begin{cases} x' = \sqrt{q}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ x'' = \sqrt{q}(\cos\alpha - i\sin\alpha), \end{cases}$$

valeurs des racines cherchées.

2° Si les racines sont égales, c'est-à-dire si l'on a $\frac{p^2}{4} - q = 0$, les deux racines sont égales et égales à $-\frac{p}{2}$, et sont par suite calculables par logarithmes.

3° Supposons enfin les racines réelles et distinctes, c'est-à-dire $\frac{p^2}{4} - q > 0$. Nous pouvons employer deux méthodes, suivant que nous supposons l'équation résolue ou non.

162. *Premier procédé.* Supposons qu'on ait résolu l'équation et soient x' et x'' les deux racines supposées réelles.

1° Supposons $q > 0$; les deux racines sont de même signe, et de signe contraire au signe de p ; on peut écrire :

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}\left(1 - \frac{4q}{p^2}\right)};$$

les racines étant réelles, $\frac{4q}{p^2}$ est positif et plus petit que 1 ; on

peut donc poser :

$$\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2},$$

et on prendra pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; l'angle φ étant calculé, on aura :

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}(1 - \sin^2\varphi)} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}\cos^2\varphi}.$$

La racine carrée arithmétique de $\cos^2\varphi$ est $\cos\varphi$, puisque l'on a $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; la racine carrée arithmétique de $\frac{p^2}{4}$ est $+\frac{p}{2}$ ou $-\frac{p}{2}$ suivant que p est positif ou négatif. Si donc p est positif, on aura :

$$x' = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\cos\varphi = -\frac{p}{2}(1 - \cos\varphi) = -p\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

et de même

$$x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\cos\varphi = -\frac{p}{2}(1 + \cos\varphi) = -p\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

on calculera par logarithmes les valeurs absolues de ces quantités, et, prenant ces valeurs avec le signe $-$, on aura x' et x''.

Si p est négatif, on aura :

$$x' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\cos\varphi = -\frac{p}{2}(1 + \cos\varphi) = -p\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\cos\varphi = -\frac{p}{2}(1 - \cos\varphi) = -p\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

valeurs positives et calculables par logarithmes. Dans le premier cas, x'' est la plus grande des deux racines en valeur absolue ; dans le deuxième, x' est la plus grande racine.

2° Supposons $q < 0$; les deux racines sont de signes contraires ; on écrit :

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}\left(1 - \frac{4q}{p^2}\right)};$$

on pose :

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{4q}{p^2},$$

valeur positive, et on prend pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation. Ceci fait, on aura :

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}(1+\operatorname{tg}^2\varphi)} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}}.$$

La racine carrée arithmétique de $\cos^2\varphi$ est $\cos\varphi$, puisque l'on a $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; la racine carrée arithmétique de $\frac{p^2}{4}$ est $+\frac{p}{2}$, ou $-\frac{p}{2}$, suivant que p est positif, ou négatif. Si p est positif, on aura donc :

$$x' = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{p}{2}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

et de même

$$x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\frac{1}{\cos\varphi} = -\frac{p(1+\cos\varphi)}{2\cos\varphi} = -\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

La valeur de x' est positive et calculable par logarithmes. La valeur de x'' est négative; on calculera par logarithmes la valeur absolue $-x''$, et on prendra cette valeur avec le signe $-$.

Si p est négatif, on aura :

$$x' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\frac{1}{\cos\varphi} = -\frac{p}{2}\cdot\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{p}{2}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

La racine x' est positive, et calculable par logarithmes. La racine x'' est négative; on calculera par les tables la valeur de $-x''$, et on prendra cette valeur avec le signe $-$.

163. *Second procédé*. On peut rendre calculables par logarithmes les racines de l'équation (1), supposées réelles et distinctes, sans employer les formules de résolution de l'équation, mais en se servant de relations (2) et (3)

$$x'x'' = q \tag{2}$$
$$x' + x'' = -p, \tag{3}$$

entre les racines x', x'', et les coefficients p et q de l'équation.

1° Supposons $q > 0$; les deux racines sont de même signe. Si l'on pose :

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad x'' = \sqrt{q}\cot\varphi,$$

la relation (2) est vérifiée, et l'on voit que, si l'on connaît l'angle φ, les deux racines sont calculables par logarithmes. Pour calculer l'angle φ, on écrit que x' et que x'' satisfont à la relation (3), c'est-à-dire que l'on a :

$$\sqrt{q}\,[\mathrm{tg}\,\varphi + \cot\varphi] = -p,$$

ou

$$\frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi\cos\varphi} = -p,$$

ou, en remarquant que $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,

$$\sin 2\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}. \tag{4}$$

L'équation (4) détermine un sinus, car $\left(-\frac{2\sqrt{q}}{p}\right)^2 = \frac{4q}{p^2}$ est positif et plus petit que 1, attendu que, par hypothèse, q et $\frac{p^2}{4} - q$ sont positifs. Si p est positif, on prendra pour 2φ l'angle, compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation; φ sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$, sa tangente et sa cotangente seront négatives; φ étant connu, on aura :

$$x' = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad x'' = \sqrt{q}\cot\varphi,$$

et on aura pour x' et x'' deux valeurs négatives; on calculera

par les tables les valeurs de $-x'$ et de $-x''$, et l'on prendra ensuite ces valeurs avec le signe $-$; φ étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$, la valeur absolue de $\operatorname{tg}\varphi$ est plus grande que la valeur absolue de $\cot\varphi$; x' est donc la plus grande racine en valeur absolue.

Si p est négatif, on prendra pour 2φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à l'équation (4); φ sera compris entre o et $\frac{\pi}{4}$, sa tangente et sa cotangente seront positives. Les racines sont positives, et leurs valeurs

$$x' = \sqrt{q}\operatorname{tg}\varphi, \qquad x'' = \sqrt{q}\cot\varphi,$$

sont calculables par logarithmes ; φ étant compris entre o et $\frac{\pi}{4}$, la valeur de $\operatorname{tg}\varphi$ est plus petite que la valeur de $\cot\varphi$, et x'' est la plus grande des deux racines.

2° Supposons $q < 0$; les deux racines sont de signes contraires. Puisque $-q$ est positif, on peut poser

$$x' = \sqrt{-q}\operatorname{tg}\varphi, \qquad x'' = -\sqrt{-q}\cot\varphi;$$

l'équation (2) est ainsi vérifiée, et si nous écrivons que x' et x'' ont une somme égale à $-p$, nous aurons, pour déterminer l'angle φ, la relation

$$\sqrt{-q}(\operatorname{tg}\varphi - \cot\varphi) = -p,$$

ou

$$\frac{\sqrt{-q}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi} = -p,$$

ou

$$-\frac{2\sqrt{-q}\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = -p,$$

ou enfin

$$(5) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{-q}}{p}.$$

Si p est positif, on prendra pour 2φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; φ sera compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, sa tangente et sa cotangente seront positives ; dès lors, x' sera positive, x'' sera négative ; on calculera, par logarithmes, les valeurs positives de x' et de $-x''$ au moyen des relations

$$x' = \sqrt{-q}\,\operatorname{tg}\varphi, \qquad -x'' = \sqrt{-q}\,\cot\varphi,$$

et on changera le signe de la valeur de $-x''$ pour avoir x''.

Si p est négatif, la valeur de $\operatorname{tg} 2\varphi$ est négative ; on prendra pour 2φ l'angle, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, qui satisfait à la relation (5) ; φ sera compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, sa tangente et sa cotangente seront positives ; on calculera encore x' et $-x''$ par logarithmes au moyen des formules

$$x' = \sqrt{-q}\,\operatorname{tg}\varphi, \qquad -x'' = \sqrt{-q}\,\cot\varphi,$$

et on changera le signe de la valeur de $-x''$ pour avoir x''.

§ III. — ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

164. On appelle *équation trigonométrique* une relation entre les lignes trigonométriques d'un ou de plusieurs arcs qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs attribuées aux arcs ; chercher ces valeurs, c'est résoudre l'équation. Lorsque l'équation ne renferme qu'un seul arc inconnu, on dit que l'équation est à une seule inconnue ; si l'on a plusieurs arcs inconnus, il faut, en général, autant d'équations, trigonométriques ou non, qu'il y a d'arcs inconnus.

Lorsque l'on veut résoudre une équation trigonométrique ne contenant qu'un arc inconnu, on cherche à transformer l'équation de telle sorte que l'arc inconnu ne figure plus que sous une seule ligne trigonométrique ; on prend cette ligne trigonométrique pour inconnue auxiliaire et on est ramené à un problème d'algèbre ; une fois cette inconnue auxiliaire calculée,

on prend successivement chacune de ses valeurs, et on cherche les arcs qui correspondent à cette ligne trigonométrique ainsi connue. Il est bien entendu que si l'inconnue auxiliaire choisie est une ligne trigonométrique non susceptible de prendre toutes les valeurs possibles, ou si l'équation correspond à un problème, il faudra discuter, c'est-à-dire chercher dans quelles conditions les valeurs obtenues sont admissibles, et ne prendre que les arcs compris entre les limites déterminées par les conditions de possibilité de la question.

Il arrive assez souvent qu'en voulant exprimer toutes les lignes trigonométriques qui figurent dans l'équation proposée en fonction d'une seule ligne trigonométrique, on soit conduit à une équation plus générale que l'équation primitive; il faudra avoir soin, l'équation finale étant résolue, de faire un choix parmi les solutions obtenues et de ne garder que les valeurs qui satisfont véritablement à l'équation proposée.

Lorsqu'il s'agit de résoudre un système d'équations, dont l'une au moins est trigonométrique, contenant autant d'équations que d'inconnues, on élimine toutes les inconnues sauf une entre les équations proposées, et on est ramené à résoudre une seule équation à une seule inconnue ; cette inconnue étant obtenue, on porte sa valeur successivement dans les équations proposées dont on s'est servi et on obtient les valeurs des autres inconnues.

Lorsque la question consiste à chercher deux arcs, il est souvent avantageux de former des équations donnant la somme et la différence de ces arcs, on en déduit ensuite par addition et par soustraction les valeurs des arcs eux-mêmes.

165. **Problème.** *Résoudre l'équation*

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

Remplaçant $\sin 2x$ et $\operatorname{tg} x$ par leurs valeurs en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$, l'équation précédente devient

$$2 \sin x \cos^2 x = \sin x,$$

ou

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant un produit de



deux facteurs, cette équation se décompose dans les deux suivantes :

1° $\sin x = 0$, d'où $x = k\pi$;

2° $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, d'où $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A la valeur $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, correspondent les arcs compris dans la formule

$$x = 2k'\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

et à la valeur $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, correspondent les arcs compris dans la formule

$$x = 2k''\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$$

En résumé, on obtient comme solutions tous les arcs compris dans l'une quelconque des formules

$$x = k\pi, \qquad x = 2k'\pi \pm \frac{\pi}{4}, \qquad x = 2k''\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$$

166. **Problème.** *Résoudre l'équation*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}.$$

Chassons le dénominateur, nous aurons :

$$(\operatorname{tg} x + 2)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg} x - 2,$$

ou

$$\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg} x - 2\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = 0;$$

remplaçons $\operatorname{tg} x$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

et remarquons que dans le premier terme $1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ est en facteur

au numérateur et au dénominateur ; l'équation devient, après simplification,

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=0,$$

ou, en chassant le dénominateur et en ordonnant,

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0,$$

équation dont les racines sont imaginaires. L'équation proposée n'a donc aucune solution réelle.

167. **Problème.** *Résoudre l'équation*

$$3\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x+1=0.$$

Remplaçons $\operatorname{tg}3x$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tg}x$, chassons le dénominateur et ordonnons ; l'équation devient

$$3\operatorname{tg}^4 x-6\operatorname{tg}^2 x-1=0.$$

Cette équation du second degré en $\operatorname{tg}^2 x$ a ses racines réelles et de signes contraires ; à la valeur négative de $\operatorname{tg}^2 x$ correspondent pour $\operatorname{tg}x$ deux valeurs imaginaires qui ne conviennent pas ; à la valeur positive de $\operatorname{tg}^2 x$ correspondent pour $\operatorname{tg}x$ deux valeurs réelles, égales et de signes contraires, qui conviennent toutes deux. On a ainsi :

$$\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}.$$

Soit α le plus petit arc positif dont la tangente est égale à $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}$; tous les arcs qui satisfont à l'équation sont compris dans la formule

$$x=k\pi\pm\alpha.$$

168. **Problème.** *Résoudre l'équation*

$$(1)\qquad a\sin x+b\cos x=c,$$

où a, b, c, sont des nombres donnés, positifs ou négatifs.

Premier procédé. Divisons les deux membres de l'équation par a, nous aurons :

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Posons :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \tag{3}$$

et prenons pour φ l'arc positif, moindre que π, qui satisfait à cette équation ; il y en a un et un seul. L'équation (2) devient alors

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{c}{a},$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tg}\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et chassant le dénominateur,

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi,$$

ou

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi. \tag{4}$$

L'équation (4) ne renferme plus x que sous une seule ligne trigonométrique, et de plus la formule qui donne $\sin(x+\varphi)$ est calculable par logarithmes.

Le calcul est donc le suivant : de l'équation (3) on déduit, au moyen des tables de logarithmes, la valeur de φ ; si a et b sont de même signe, on prend pour φ l'arc trouvé dans les tables ; si a et b sont de signes contraires, on cherche dans les tables l'arc tel que sa tangente soit égale à la valeur absolue de $\frac{b}{a}$, et on en prend le supplément. L'arc φ étant ainsi connu, on calcule au moyen des tables un des arcs $x+\varphi$ qui satisfont à l'équation (4) ; si α est l'arc ainsi obtenu, tous les autres arcs satisfaisant à l'équation seront compris dans l'une ou dans l'autre des formules

$$x+\varphi = 2k\pi + \alpha, \quad \text{ou} \quad x+\varphi = (2k'+1)\pi - \alpha;$$

on en déduit :

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi, \quad \text{ou} \quad x = (2k'+1)\pi - \alpha - \varphi, \tag{5}$$

k et k' étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Discussion. Pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que l'équation (1) puisse être vérifiée, il faut et il suffit que l'on puisse satisfaire à l'équation (4), et comme cette équation détermine l'arc $x+\varphi$ par son sinus, il faut et il suffit que la valeur de ce sinus, $\frac{c}{a}\cos\varphi$, soit comprise entre -1 et $+1$. Il faut donc que l'on ait :

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1.$$

Mais, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$; d'autre part $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$; donc $\cos^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, et la condition précédente devient

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} \leqslant 1,$$

ou

(6) $$c^2 \leqslant a^2+b^2;$$

telle est la condition de possibilité cherchée. — Si la condition $c^2 < a^2+b^2$ est remplie, on a deux séries d'arcs distincts compris dans les formules (5) et satisfaisant à la question. — Si l'on a $c^2 = a^2+b^2$, on a $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi = 1$, et par suite $\frac{c}{a}\cos\varphi$ est égal à $+1$ ou à -1, suivant les signes respectifs de a, b, c. Si $\frac{c}{a}\cos\varphi$ est égal à $+1$, on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et les deux séries d'arcs donnés par les formules (5) se réduisent à une seule

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

qui doit être regardée comme une série double. Si $\frac{c}{a}\cos\varphi$ est égal à -1, on a $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, et les deux séries d'arcs donnés par les formules (5) se réduisent à une seule

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

qui doit être regardée comme une série double. — Enfin si l'on a $c^2 > a^2+b^2$, le problème est impossible.

Résumé de la discussion :

$$\begin{cases} c^2 < a^2+b^2 & \text{2 séries de solutions.} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha - \varphi \\ x = (2k'+1)\pi - \alpha - \varphi. \end{cases} \\ c^2 = a^2+b^2 & \text{1 série double } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ ou } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi \\ c^2 > a^2+b^2 & \text{0 solution.} \end{cases}$$

169. *Second procédé.* On sait (102) que $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment en fonction rationnelle de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; comme l'équation (1) est du premier degré par rapport à $\sin x$ et à $\cos x$, si on remplace $\sin x$ et $\cos x$ par leurs valeurs en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, on est ramené à une équation du second degré en $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Or on a :

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

l'équation (1) deviendra, en substituant et en chassant le dénominateur,

$$(7) \qquad (c+b)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c-b) = 0.$$

La seule condition de possibilité que doit remplir une valeur de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ est qu'elle soit réelle; donc pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$a^2 - (c+b)(c-b) \geqslant 0,$$

ou

$$a^2 + b^2 - c^2 \geqslant 0,$$

ou

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Si l'on a $c^2 < a^2 + b^2$, les deux racines de l'équation (7) sont réelles et distinctes; si α est l'un des arcs correspondant à

l'une des valeurs de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si β est l'un des arcs correspondant à l'autre valeur de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, on aura, pour $\frac{x}{2}$, les deux séries de valeurs

$$\frac{x}{2}=k\pi+\alpha, \qquad \frac{x}{2}=k'\pi+\beta,$$

et par suite, pour x, les deux séries de valeurs

$$x=2k\pi+2\alpha, \qquad x=2k'\pi+2\beta.$$

Si $c^2=a^2+b^2$, les deux racines de l'équation (7) sont égales; on n'a plus qu'une série d'arcs, qui doit être regardée comme double,

$$x=2k\pi+2\alpha.$$

Enfin si l'on a $c^2>a^2+b^2$, les racines de l'équation (7) sont imaginaires, et le problème est impossible.

Résumé de la discussion :

$c^2<a^2+b^2$	2 séries de solutions	$\begin{cases} x=2k\pi+2\alpha \\ x=2k'\pi+2\beta. \end{cases}$
$c^2=a^2+b^2$	1 série double	$x=2k\pi+2\alpha.$
$c^2>a^2+b^2$	0 solution.	

170. **Problème.** *Résoudre l'équation*

(1) $$a\operatorname{tg}x+b\cot x=c,$$

a, b, c, étant des nombres donnés.

Premier procédé. On peut ramener la résolution de cette équation à la résolution d'une équation de la forme traitée précédemment (168). Remplaçons $\operatorname{tg}x$ et $\cot x$ par leurs valeurs en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$; l'équation devient, en chassant le dénominateur $\sin x\cos x$,

$$a\sin^2 x+b\cos^2 x=c\sin x\cos x;$$

multipliant par 2, et remarquant que

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x, \quad 2\cos^2 x=1+\cos 2x, \quad 2\sin x\cos x=\sin 2x,$$

l'équation s'écrit :

$$a(1-\cos 2x)+b(1+\cos 2x)=c\sin 2x,$$

ou

$$(2)\qquad c\sin 2x+(a-b)\cos 2x=a+b,$$

équation du premier degré en sin $2x$ et cos $2x$. Appliquons le premier procédé du n° 168 ; nous poserons :

$$(3)\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{a-b}{c},$$

nous prendrons pour φ l'arc positif, moindre que π, qui satisfait à cette relation ; nous aurons alors

$$(4)\qquad \sin(2x+\varphi)=\frac{a+b}{c}\cos\varphi,$$

équation qui donne $2x+\varphi$, et par suite x; la condition de possibilité sera

$$(a+b)^2\leqslant(a-b)^2+c^2,$$

ou

$$c^2\geqslant 4ab.$$

Si l'on a $c^2>4ab$, on aura pour x les deux séries de valeurs

$$x=k\pi+\frac{\alpha-\varphi}{2},\qquad x=k'\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\varphi}{2},$$

α étant l'un quelconque des arcs dont le sinus est égal à $\frac{a+b}{c}\cos\varphi$. — Si $c^2=4ab$, les deux séries d'arcs se réduisent à une seule

$$\text{ou}\quad x=k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\qquad\text{ou}\quad x=k\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2},$$

suivant que $\frac{a+b}{c}\cos\varphi$ est égal ou à $+1$ ou à -1. — Enfin si l'on a $c^2<4ab$, le problème est impossible.

171. *Second procédé*. Remplaçant, dans l'équation (1), cot x par sa valeur $\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, nous serons ramenés à résoudre l'équation du second degré en tg$x$,

$$(5)\qquad a\operatorname{tg}^2 x-c\operatorname{tg}x+b=0;$$

$\operatorname{tg} x$ n'étant assujettie qu'à la condition d'avoir une valeur réelle, la seule condition de possibilité est

$$c^2 - 4ab \geqslant 0,$$

et on retombe sur la discussion précédente.

172. **Remarque.** Au point de vue du calcul numérique, le premier procédé, dans ce problème ainsi que dans le problème précédent, est préférable au second, car les formules finales sont calculables par logarithmes, fait qui ne se présente pas dans le second procédé.

173. **Problème.** *Résoudre l'équation*

$$(1) \qquad 3m \sin^2 x - 3(3m-1)\sin x + 2(3m-1) = 0$$

et discuter suivant la grandeur du paramètre m.

L'équation (1) admettra pour $\sin x$ autant de valeurs admissibles qu'elle aura de racines réelles comprises entre -1 et $+1$.

La condition de réalité est

$$9(3m-1)^2 - 24m(3m-1) > 0,$$

ou

$$3(3m-1)(m-3) > 0.$$

Le premier membre de l'inégalité est un trinôme en m, dont le coefficient du terme en m^2 est positif; pour que ce trinôme soit positif et, par suite, pour que les racines de l'équation (1) soient réelles, il faut donner à m soit des valeurs inférieures à $\frac{1}{3}$, soit des valeurs supérieures à 3; si m est compris entre $\frac{1}{3}$ et 3 les racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Supposons les racines réelles, et comparons leurs grandeurs à $+1$ et à -1; désignons par $f(\sin x)$ le premier membre de l'équation (1) et substituons à la place de $\sin x$, dans $f(\sin x)$, successivement -1 et $+1$; nous aurons :

$$f(-1) = 18m - 5$$
$$f(1) = 1.$$

La valeur de $f(1)$ est indépendante de m, elle est toujours

positive et égale à 1; le signe de $f(-1)$ dépend de la grandeur de m par rapport à $\frac{5}{18}$, valeur plus petite que $\frac{1}{3}$. D'autre part le signe des racines dépend du signe de la somme $\frac{3m-1}{m}$ et du signe du produit $\frac{2(3m-1)}{3m}$ de ces racines. Les valeurs remarquables de m, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont donc

$$0 \qquad \frac{5}{18} \qquad \frac{1}{3} \qquad 3.$$

1° $m<0$; $f(1)$ étant positif, et le coefficient de $\sin^2 x$ étant négatif, 1 est compris entre les deux racines; d'ailleurs ces deux racines sont positives; donc la plus petite racine positive convient seule : une seule solution.

2° $0<m<\frac{5}{18}$; le coefficient de $\sin^2 x$ est positif; $f(-1)$ est négatif, donc -1 est compris entre les deux racines; la plus petite racine ne convient pas; quant à l'autre elle est positive, puisque le produit est négatif; et elle est plus petite que 1, puisque $f(1)$ est positif; donc la racine positive convient seule : une solution.

3° $\frac{5}{18}<m<\frac{1}{3}$; $f(-1)$ est positif, c'est-à-dire du même signe que le coefficient de $\sin^2 x$; donc -1 est inférieur à la plus petite racine, ou supérieur à la plus grande; d'ailleurs le produit de ces racines étant négatif, les deux racines sont de signes contraires; donc -1 est inférieur à la racine négative et par suite est inférieur aux deux racines. De même $+1$ est supérieur aux deux racines; les deux racines sont donc comprises entre -1 et $+1$: deux solutions, de signes contraires.

4° $\frac{1}{3}<m<3$; racines imaginaires : 0 solution.

5° $3<m$; $f(-1)$ et $f(1)$ étant positifs, et le coefficient de $\sin^2 x$ étant positif, chacun des nombres -1 et $+1$ est ou inférieur à la plus petite racine, ou supérieur à la plus grande; donc entre -1 et $+1$, il y a 0 ou 2 racines. Comparons -1

et $+1$ à la demi-somme des racines, $\frac{3m-1}{2m}$; cette demi-somme étant positive, -1 est inférieur aux deux racines; d'ailleurs cette demi-somme est plus grande que 1, car de l'inégalité $\frac{3m-1}{2m}>1$ supposée vraie, on déduit, en multipliant par m qui est positif, $m>1$, condition remplie; les deux racines sont donc plus grandes que 1. Aucune des deux racines ne convient, donc 0 solution.

La discussion est résumée dans le tableau suivant :

$m<0$	Une racine entre 0 et 1, une supérieure à 1; une solution.
$0<m<\frac{5}{18}$	Une racine inférieure à -1, une entre 0 et 1; une solution.
$\frac{5}{18}<m<\frac{1}{3}$	Une racine entre -1 et 0, une entre 0 et $+1$; deux solutions.
$\frac{1}{3}<m<3$	Deux racines imaginaires; pas de solution.
$3<m$	Deux racines supérieures à 1; pas de solution.

174. **Problème.** *Résoudre le système des deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y=\alpha \\ \dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin y}{b}. \end{cases}$$

Puisque l'on connaît déjà la somme $x+y$ des deux arcs inconnus, il convient de chercher à calculer leur différence. Or, d'après les propriétés des rapports, de la seconde équation on déduit :

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin y}{b}=\frac{\sin x-\sin y}{a-b}=\frac{\sin x+\sin y}{a+b},$$

ou

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{a-b}{a+b},$$



ou, d'après la formule établie au nº 145,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{a-b}{a+b},$$

ou enfin

$$(2)\qquad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Cette formule permet de calculer l'arc $\frac{x-y}{2}$; appelons $\frac{\beta}{2}$ l'un quelconque des arcs qui satisfont à la relation (2), on aura :

$$\frac{x-y}{2}=k\pi+\frac{\beta}{2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{2};$$

ajoutant et retranchant, on a :

$$(3)\qquad \begin{cases} x= \quad k\pi+\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=-k\pi+\dfrac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases}$$

175. **Problème**. *Résoudre le système des deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x-y=\alpha \\ \sin^2 x+\sin^2 y=m. \end{cases}$$

Multiplions la seconde de ces équations par 2, et remarquons que

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x,\qquad 2\sin^2 y=1-\cos 2y;$$

cette équation devient :

$$2-(\cos 2x+\cos 2y)=2m,$$

ou

$$\cos 2x+\cos 2y=2(1-m),$$

ou, en rendant le premier membre calculable par logarithmes,

$$2\cos(x+y)\cos(x-y)=2(1-m),$$

d'où enfin, en vertu de la première des équations (1),

$$(2)\qquad \cos(x+y)=\frac{1-m}{\cos\alpha}.$$

Cette équation donne $x+y$; d'ailleurs la première des équations (1) donne $x-y$; en ajoutant et en retranchant nous aurons $2x$ et $2y$, et par suite x et y en prenant les moitiés.

Mais, pour que l'équation (2) détermine l'arc $x+y$, il faut, puisque cet arc est déterminé par son cosinus, que l'on ait :

$$(3)\qquad -1<\frac{1-m}{\cos\alpha}<1.$$

Résolvons cette double inégalité par rapport à m; nous devons distinguer deux cas suivant que $\cos\alpha$ est positif ou négatif.

Supposons d'abord :

$$\cos\alpha>0;$$

nous pouvons multiplier les deux membres de chacune de ces inégalités par $\cos\alpha$, sans changer leur sens, et nous en déduisons :

$$(4)\qquad 1-\cos\alpha<m<1+\cos\alpha,$$

conditions de possibilité cherchées.

Si l'on a $\cos\alpha<0$, en multipliant par $\cos\alpha$ les deux membres de chacune des inégalités (3), les sens des inégalités sont changés, et les conditions de possibilité sont :

$$(5)\qquad 1-\cos\alpha>m>1+\cos\alpha.$$

En résumé, on voit que, pour que les équations admettent des solutions en x et y, il faut et il suffit que m soit compris entre la plus grande et la plus petite des deux quantités $1-\cos\alpha$ et $1+\cos\alpha$.

176. **Problème.** *Résoudre le système des deux équations*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin x&=\operatorname{tg}\alpha.\sin(y+\alpha)\\ \sin(\alpha-x)&=2\sin^2\frac{y}{2}+\cos(y+2\alpha),\end{aligned}\right.$$

où x et y sont des arcs inconnus, α un arc donné.

Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer l'arc donné α compris entre 0 et 2π, car les équations (1) ne changent pas si on y remplace α par $\alpha + 2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Cela posé, considérons la seconde des équations (1); si nous y remplaçons $2\sin^2 \frac{y}{2}$ par $1 - \cos y$, elle devient :

$$\sin(\alpha - x) = 1 - \cos y + \cos(y + 2\alpha)$$
$$= 1 - [\cos y - \cos(y + 2\alpha)],$$

ou, en transformant en produit la différence des cosinus,

(2) $$\sin(\alpha - x) = 1 - 2\sin(y + \alpha)\sin\alpha.$$

Or la première des relations (1) donne :

(3) $$\sin\alpha\sin(y + \alpha) = \cos\alpha\sin x;$$

et, en remplaçant $\sin\alpha\sin(y + \alpha)$ par $\cos\alpha\sin x$ dans l'équation (2), on a :

$$\sin(\alpha - x) = 1 - 2\cos\alpha\sin x,$$

ou

$$\sin(\alpha - x) = 1 - [\sin(\alpha + x) - \sin(\alpha - x)],$$

ou enfin

(4) $$\sin(\alpha + x) = 1.$$

Cette dernière équation donne x; on en déduit :

$$\alpha + x = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

d'où

(5) $$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

x étant ainsi connu, l'équation (3) nous donne :

$$\sin(y + \alpha) = \frac{\cos\alpha\sin x}{\sin\alpha},$$

ou, en remplaçant $\sin x$ par $\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ou par $\cos\alpha$,

$$(6) \qquad \sin(y+\alpha) = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Cette équation permet de calculer y. Si β est l'un des angles dont le sinus est égal à $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, on aura pour $y+\alpha$

$$\text{ou} \quad y+\alpha = 2k'\pi + \beta, \qquad \text{ou} \quad y+\alpha = (2k''+1)\pi - \beta,$$

d'où, pour y,

$$(7) \quad \text{ou} \quad y = 2k'\pi + \beta - \alpha, \qquad \text{ou} \quad y = (2k''+1)\pi - \beta - \alpha.$$

Discussion. Pour que l'équation (6) détermine un sinus, il faut que la valeur de ce sinus soit comprise entre -1 et $+1$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$-1 < \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} < 1,$$

ou

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} < 1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha} < 1,$$

ou enfin en multipliant par $\sin^2\alpha$, valeur positive,

$$(1-\sin^2\alpha)^2 - \sin^2\alpha < 0.$$

Il faut donc que l'arc α soit tel que l'on ait :

$$(8) \qquad \sin^4\alpha - 3\sin^2\alpha + 1 < 0.$$

Or, si l'on considère le trinôme $z^2 - 3z + 1$, il a pour racines $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ou $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$; pour que ce trinôme soit négatif, il faut donner à z des valeurs comprises entre les deux racines $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$. Mais $\sin^2\alpha$ est toujours plus petit que 1, et comme 1 est compris entre $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

et $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$, pour que l'inégalité (8) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(9) \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < \sin^2\alpha.$$

Soit α' le plus petit arc positif dont le sinus est égal à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; l'arc α étant supposé compris entre o et 2π, on voit que, pour que l'inégalité (8) soit vérifiée, il faut :

$$\text{ou} \quad \alpha' < \alpha < \pi - \alpha', \qquad \text{ou} \quad \pi + \alpha' < \alpha < 2\pi - \alpha'.$$

Si l'une ou l'autre de ces conditions est remplie, les équations sont compatibles, et les valeurs des inconnues sont fournies par les équations (5) et (7). Si aucune de ces conditions n'est remplie, les équations (1) sont incompatibles.

Si α est égal à l'une des valeurs limites α' ou $\pi - \alpha'$, l'équation (6) donne :

$$\sin(y+\alpha) = 1 ;$$

les deux séries d'arcs donnés par les formules (7) se réduisent à une seule

$$y = 2k'\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

qui doit être regardée comme une série double.

Enfin, si α est égal à l'une des valeurs limites $\pi + \alpha'$ ou $2\pi - \alpha'$, l'équation (6) donne :

$$\sin(y+\alpha) = -1 ;$$

les deux séries d'arcs donnés par les formules (7) se réduisent à une seule

$$y = 2k'\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha$$

qui doit être regardée comme une série double.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V.

1. Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin a+\sin b},\quad \frac{\sin(a+b)}{\sin a-\sin b},\quad \frac{\sin(a+b)}{\cos a+\cos b},\quad \frac{\sin(a+b)}{\cos a-\cos b}.$$

2. Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin(a+b-c)+\sin(b+c-a)+\sin(c+a-b)-\sin(a+b+c).$$

(Concours général.)

3. Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c),$$
$$\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c).$$

4. Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b).$$

5. Rendre calculable par logarithmes

$$\frac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}$$

et plus généralement

$$\frac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a+\ldots\ldots+\sin(2n-1)a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a+\ldots\ldots+\cos(2n-1)a}.$$

6. Calculer la valeur de l'expression

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2m}+\sin\frac{2\pi}{2m}+\sin\frac{3\pi}{2m}+\ldots+\sin\frac{m\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2\pi}{2m}+\frac{3\pi}{2m}+\ldots\ldots+\frac{m\pi}{2m}}$$

et chercher la limite de cette expression lorsque m croît indéfiniment.

7. Calculer la somme des carrés des sinus, ou des carrés des cosinus d'arcs en progression arithmétique.

8. Sachant que la somme $a+b+c$ est égale à $2k\pi$, rendre calcu-

lables par logarithmes les expressions

$$\sin a + \sin b + \sin c, \qquad \sin a + \sin b - \sin c,$$
$$\cos a + \cos b + \cos c + 1, \qquad \cos a + \cos b - \cos c - 1.$$

9. Sachant que la somme $a + b + c$ est égale à $\frac{\pi}{2}$, rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\cos a + \cos b + \cos c, \qquad \cos a + \cos b - \cos c.$$

10. Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}, \qquad \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$
$$\frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha}, \qquad \frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{a \sin \alpha - b \cos \alpha}.$$

11. Démontrer que l'on a, quel que soit x,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x \cos a}{1 - x \sin a} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

12. Vérifier l'identité

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{p}{q} + \operatorname{arc\,tg} \frac{q-p}{q+p} = \frac{\pi}{4}.$$

13. Résoudre les équations

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 2 \sin x.$$
$$3 \operatorname{tg} x = 2 \cos x.$$
$$3 \operatorname{tg} x = \cot x.$$
$$5 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 = 0.$$
$$\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$
$$\cos nx + \cos (n-2) x = \cos x.$$
$$\cot x + \cos x = \operatorname{cos\acute{e}c} x - \sin x.$$
$$\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin^2 x + 4 \sin^3 x = 0.$$
$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0.$$
$$\operatorname{tg} (x + a) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \frac{1}{3}}.$$

(Baccalauréat, Rennes.)

$$\operatorname{s\acute{e}c} x = \sin x + 2 \cos x.$$

(Baccalauréat, Bordeaux.)

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3x}{2}.$$

(Baccalauréat, Brest.)

$$\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right).$$

(Baccalauréat, Montpellier.)

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 3x + \sin 5x.$$

(Baccalauréat, Caen.)

$$\sin 7x - \sin x = \sin 3x.$$

(Baccalauréat, Bordeaux.)

14. Sachant que l'on a

$$\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a},$$

calculer $\sin x$.

(Baccalauréat.)

15. m désignant un paramètre arbitraire, résoudre et discuter les équations

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = m.$$

$$\sin x + \cos x + \sin 2x = m.$$

$$\operatorname{tg} x - \cot x = m(\sin x + \cos x).$$

$$\sin x \sin 3x = m.$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = m.$$

$$(\sin x - \cos x)(\operatorname{séc} x - \operatorname{coséc} x) = m.$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = m.$$

$$m \operatorname{tg} x = \sin x - \sin 2x.$$

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1)\sin x - 3m + 1 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = m \operatorname{tg} 2x.$$

$$\sin x \operatorname{tg} x = m \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{4 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\sin 5x = m \sin^5 x.$$

$$\sin(2x + \alpha) + m \sin(x - \alpha) = m \sin(x + \alpha) + \sin(2x - \alpha) + \sin 2\alpha.$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = m \cos 2x.$$

$$2 \sin 3x - 3 \sin 2x = m \sin x.$$

$$\operatorname{tg}^2 x = m \operatorname{tg}(x + a)\operatorname{tg}(x - a).$$

(Baccalauréat, Paris.)

$$(\sin x - \cos x)\sin x = m.$$

(Baccalauréat, Montpellier.)

$$m\sin^2 x - (m-2)\sin x + 3 = 0.$$

(Saint-Cyr, Oral.)

$$m\,\mathrm{tg}^4 x - 2(m-1)\mathrm{tg}^2 x + m - 2 = 0.$$

(Saint-Cyr, Oral.)

$$(m-1)\,\mathrm{tg}^2 x - 2(m-2)\,\mathrm{tg}\,x + 3(m-3) = 0.$$

(Saint-Cyr, Oral.)

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = m.$$

16. Résoudre les systèmes d'équations simultanées à deux inconnues

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = m \\ x + y = \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{séc}\,x - \mathrm{séc}\,y}{\mathrm{séc}\,x + \mathrm{séc}\,y} = \dfrac{\mathrm{coséc}\,y - \mathrm{coséc}\,x}{\mathrm{coséc}\,y + \mathrm{coséc}\,x} \\ \sin x = \mathrm{tg}\,y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

(Baccalauréat, Paris.)

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,2x = \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,y \\ \sin x = \sin\alpha\cos y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = a \\ \cot x + \cot y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \mathrm{coséc}\,x + \mathrm{coséc}\,y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(x+\alpha) + \sin(x-\alpha) + 2m\cos^2\dfrac{y}{2} = k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(x+\alpha) - \sin(x-\alpha) + 2m\cos^2\dfrac{y}{2} = k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \sin(\alpha - y) = a \\ x \sin(\beta - y) = b. \end{cases}$$

17. Étant données les deux équations

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\rho \sin\alpha \\ \cos x + \cos y = 2\rho\cos\alpha, \end{cases}$$

former l'équation qui admet comme racines $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

18. Résoudre les systèmes d'équations simultanées à trois inconnues

$$\begin{cases} x + y + z = k\pi \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{a} = \dfrac{\operatorname{tg} y}{b} = \dfrac{\operatorname{tg} z}{c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = k\pi \\ \dfrac{\sin x}{a} = \dfrac{\sin y}{b} = \dfrac{\sin z}{c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\cot x}{a} = \dfrac{\cot y}{b} = \dfrac{\cot z}{c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = b \\ \cot z - \cot x = c. \end{cases}$$

19. Éliminer x entre les systèmes de deux équations

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ a'\sin x + b'\cos x = c'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{coséc} x - \sin x = a \\ \operatorname{séc} x - \cos x = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sin x + b\cos x = c \\ a'\operatorname{tg} x + b'\cot x = c'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha \sin x = 8\cos^2 \dfrac{\alpha + x}{2} \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cot^2\dfrac{\beta}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x \quad = a \\ \operatorname{tg} 2x + \cot 2x = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x(1 + \sin^2 x) - \cos x \sin 2x = a \\ 2\cos x(1 + \cos^2 x) - \sin x \cos 2x = b. \end{cases}$$

20. Étant données les deux équations

$$x(1 + \sin^2\theta - \cos\theta) - y\sin\theta(1 + \cos\theta) = a(1 + \cos\theta)$$
$$y(1 + \cos^2\theta) - x\sin\theta\cos\theta = a\sin\theta,$$

on demande : 1° de résoudre ces deux équations par rapport à x et à y; 2° d'éliminer θ entre ces deux équations.

21. Démontrer que le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$a\alpha \sin x - b\beta \cos x = \frac{1}{2}c^2 \sin 2x$$

$$a\alpha \cos x + b\beta \sin x = c^2 \cos 2x$$

peut se mettre sous la forme

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

22. Démontrer que le résultat de l'élimination de x entre les deux équations

$$a\cos(x + \alpha) + b\sin(x + \alpha) = c\sin 2x$$
$$b\cos(x + \alpha) - a\sin(x + \alpha) = 2c\cos 2x$$

peut se mettre sous la forme

$$(a\cos\alpha + b\sin\alpha)^{\frac{2}{3}} + (a\sin\alpha - b\cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2c)^{\frac{2}{3}}.$$

23. Éliminer x et y entre les systèmes de trois équations

$$\begin{cases} x + y = k \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\alpha \\ \cot x + \cot y = \cot\beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin\alpha \sin\gamma \\ \sin y = \sin\beta \sin\gamma \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \cos \alpha \cos 2\gamma \\ \cos y = \cos \beta \cos 2\gamma \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \gamma. \end{cases}$$

24. L'arc x croissant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, étudier les variations de l'expression

$$5 \sin^2 x - 8 \sin x - 15\,;$$

maximum, minimum.

25. L'arc x croissant de o à π, étudier les variations de l'expression

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x + \cot \alpha \cot x,$$

α étant un angle donné.

26. Maximum et minimum de l'expression

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 y,$$

sachant que l'on a :

$$x + y = k.$$

27. Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$3 \operatorname{tg} x + 4 \cot x.$$

(Baccalauréat, Grenoble.)

28. Trouver le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}.$$

(Baccalauréat, Montpellier.)

29. Variations de l'expression $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$, lorsque x croît de o à $\frac{\pi}{2}$; maximum et minimum.

(Baccalauréat, Toulouse.)

30. Maximum et minimum de l'expression $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, x étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

(Baccalauréat.)

31. Résoudre l'équation

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

CHAPITRE VI.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

§ I. Relations entre les éléments d'un triangle rectangle. — § II. Relations entre les éléments d'un triangle quelconque. — § III. Résolution des triangles rectangles. — § IV. Résolution des triangles quelconques. — § V. Applications numériques. — § VI. Problèmes divers sur les triangles. — § VII. Quadrilatère inscriptible. — § VIII. Application de la trigonométrie aux questions que présente le levé des plans.

177. On distingue dans un triangle six éléments : trois côtés et trois angles. On a vu, en géométrie, que lorsqu'on connaît trois de ces six éléments, pourvu que l'un d'eux au moins soit un côté, on peut construire le triangle et, par conséquent, déterminer les trois autres éléments. Mais, ces constructions graphiques n'étant pas susceptibles d'une grande précision, la détermination, par ce procédé, des éléments inconnus ne pourrait se faire qu'avec une approximation assez grossière.

A l'aide des lignes trigonométriques, on peut, connaissant trois éléments d'un triangle, dont un côté, *calculer* les trois autres; c'est ce qu'on appelle *résoudre* le triangle. La résolution des triangles repose sur certaines relations entre les longueurs des côtés d'un triangle et les lignes trigonométriques des angles de ce triangle.

Soit ABC un triangle; nous désignerons par A, B, C, les angles du triangle, *évalués en degrés, minutes et secondes*, et par a, b, c, les nombres obtenus en mesurant avec la même unité de longueur les côtés BC, AC, AB, c'est-à-dire les côtés opposés respectivement aux angles A, B, C. Dans le cas d'un triangle rectangle, nous appellerons A l'angle droit ; a sera la mesure de la longueur de l'hypoténuse.

§ I. — Relations entre les éléments d'un triangle rectangle.

178. **Théorème.** *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé.*

Soit ABC un triangle rectangle (*fig.* 55), A étant le sommet de l'angle droit. Du point B comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, décrivons une circonférence; soient M et N ceux des points de rencontre de cette circonférence avec les côtés BC et BA du triangle qui sont placés sur BC et sur BA respectivement du même côté que les points C et A par rapport au point B. Abaissons du point M la perpendiculaire MP sur BA; si nous regardons le point N comme l'origine de l'arc qui mesure l'angle ABC, on voit que PM représente, en grandeur et en signe, le sinus de l'angle ABC, puisque ce sinus est positif. Les triangles semblables ABC, PBM donnent :

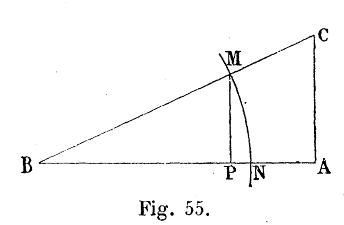


Fig. 55.

$$\frac{AC}{PM}=\frac{BC}{BM};$$

mais

$$AC=b,\quad PM=\sin B,\quad BC=a,\quad BM=1,$$

on a donc :

$$b=a\sin B.$$

On aurait de même :

$$c=a\sin C.$$

179. **Corollaire.** *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse.*

En effet, les angles B et C étant complémentaires, on a $\sin B=\cos C$ et $\sin C=\cos B$. Les formules précédentes peuvent donc être remplacées par les suivantes :

$$b=a\cos C$$
$$c=a\cos B.$$

180. **Remarque.** Ce corollaire a déjà été établi n° 77, et démontré directement.

181. **Théorème.** *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté de l'angle droit multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.*

Soit ABC le triangle (*fig.* 56); décrivons du point B comme centre une circonférence, avec un rayon égal à l'unité de longueur; soient M et N ceux des points de rencontre de cette circonférence avec les côtés BC et BA du triangle qui sont placés sur BC et sur BA respectivement du même côté que les points C et A par rapport au point B. Au point N menons la tangente à l'arc MN jusqu'à sa rencontre en T avec BC. Si l'on prend comme origine de l'arc qui mesure l'angle ABC, le point N, on voit que NT représente en grandeur et en signe la tangente de l'angle ABC, puisque cette tangente est positive. Les triangles semblables ABC, NBT donnent:

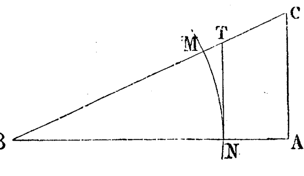


Fig. 56.

$$\frac{AC}{NT}=\frac{BA}{BN};$$

mais

$$AC=b, \quad BA=c, \quad NT=\operatorname{tg}B, \quad BN=1;$$

on a donc:

$$b=c\operatorname{tg}B.$$

On aurait de même:

$$c=b\operatorname{tg}C.$$

182. **Corollaire.** *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la cotangente de l'angle aigu adjacent au premier côté.*

En effet, les angles B et C étant complémentaires, on a $\operatorname{tg}B=\cot C$, $\operatorname{tg}C=\cot B$, et les formules précédentes peuvent être écrites

$$b=c\cot C$$
$$c=b\cot B.$$

183. **Remarque.** Nous avons ainsi établi huit relations entre

les côtés et les angles d'un triangle rectangle; d'autre part la géométrie nous fournit les deux relations

$$B + C = 90^0$$
$$b^2 + c^2 = a^2,$$

ce qui nous donne 10 relations entre les 5 éléments a, b, c, B, C. Or un triangle rectangle est complètement défini lorsqu'on se donne 2 de ces 5 quantités dont un côté; 3 relations suffisent pour définir les 3 autres éléments, et par suite, parmi les 10 relations, 3 seulement sont distinctes, les 7 autres étant les conséquences de celles-ci convenablement choisies.

Ainsi les trois relations

$$\begin{cases} b = a \sin B \\ c = a \sin C \\ B + C = 90^0 \end{cases}$$

sont distinctes, et de ces formules on peut déduire toutes les autres. En effet, de $B + C = 90^0$, on déduit :

$$C = 90^0 - B,$$

et par suite

$$c = a \cos B;$$

donc

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tg} B; \quad b^2 + c^2 = a^2(\sin^2 B + \cos^2 B) = a^2,$$

et ainsi de suite. Il est bon de remarquer que par le calcul précédent nous ne démontrons pas le théorème du carré de l'hypoténuse, car la relation fondamentale $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$, dont nous nous servons, a été établie en s'appuyant sur ce théorème.

§ II. — Relations entre les éléments d'un triangle quelconque.

184. **Théorème.** *Dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de ces côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Nous distinguerons deux cas :

1° L'angle A est un angle aigu (*fig.* 57); du sommet C abaissons la perpendiculaire CH sur le côté AB; AH est la projection du côté AC sur le côté AB; or, d'après le théorème de géométrie élémentaire relatif au côté d'un triangle opposé à un angle aigu, on a :

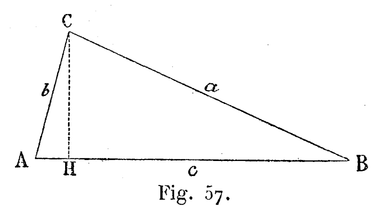


Fig. 57.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.AH,$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.AH.$$

Dans le triangle rectangle ACH, on a :

$$AH = b\cos A;$$

on a donc :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

c'est la formule qu'il s'agissait de démontrer.

2° L'angle A est un angle obtus (*fig.* 58); abaissons encore du sommet C la perpendiculaire CH sur le côté AB; d'après le théorème de géométrie relatif au côté opposé à un angle obtus, on a :

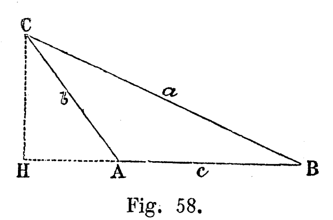


Fig. 58.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB.AH,$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c.AH.$$

Dans le triangle ACH, rectangle en H, on a :

$$AH = b\cos\widehat{CAH} = b\cos(180^\circ - A) = -b\cos A;$$

en remplaçant, on a donc :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

formule cherchée.

185. **Théorème.** *Dans un triangle, un côté quelconque est égal à la somme algébrique des produits obtenus en multipliant chacun des deux autres côtés par le cosinus de l'angle qu'il fait avec le premier.*

Considérons le côté BC; nous distinguerons deux cas, suivant que les angles adjacents B et C sont tous les deux aigus, ou suivant que l'un de ces angles est obtus.

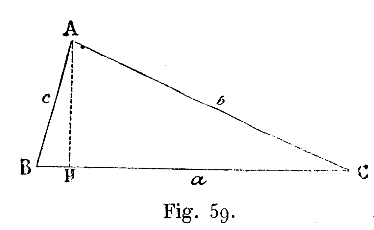


Fig. 59.

Dans le premier cas, les angles B et C étant aigus (*fig.* 59), si du sommet A nous abaissons la perpendiculaire AH sur le côté BC, le pied H de cette perpendiculaire se trouve compris entre B et C, et on a :

$$BC = BH + CH.$$

Or, dans les triangles rectangles ABH, ACH, on a :

$$BH = c \cos B, \qquad CH = b \cos C,$$

d'ailleurs BC est égal à a; on a donc :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

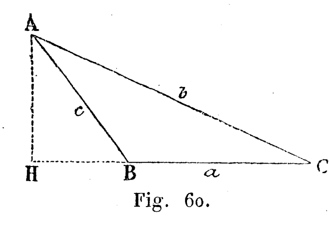


Fig. 60.

Dans le second cas, supposons l'angle B obtus (*fig.* 60); alors le pied H de la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC est sur le prolongement du côté BC au-delà du point B, et on a :

$$BC = CH - BH.$$

Les triangles rectangles ACH, ABH donnent :

$$CH = b \cos C$$

$$BH = c \cos \widehat{ABH} = c \cos(180^\circ - B) = -c \cos B;$$

d'ailleurs BC est égal à a; on a donc :

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

c'est-à-dire la même relation que dans le premier cas.

186. **Remarque**. Si on considère, dans un triangle ABC, les deux contours BAC et BC qui ont les mêmes extrémités B et C, et si on les projette orthogonalement sur BC, on a, d'après le théorème des projections (72 et 78),

$$a = c\cos B + b\cos C,$$

c'est-à-dire la relation établie au n° précédent; cette relation exprime donc que: *Dans un triangle* ABC, *un côté* BC *est égal à la somme algébrique des projections des côtés* BA, AC *sur* BC.

187. **Théorème**. *Dans un triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Première démonstration. Soit ABC le triangle considéré, je dis que l'on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

En effet, abaissons du point C la perpendiculaire CH sur le côté AB ; le pied H de cette perpendiculaire peut se trouver entre

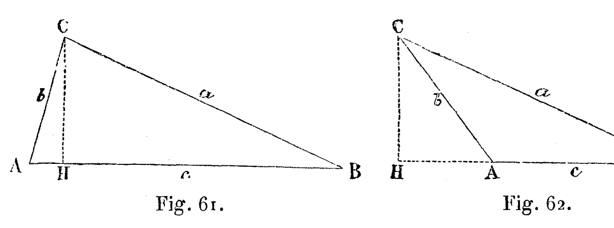


Fig. 61. Fig. 62.

A et B, ou à l'extérieur de AB. Dans le premier cas (*fig*. 61), les deux triangles rectangles ACH, BCH donnent

$$CH = b\sin A, \qquad CH = a\sin B,$$

d'où

$$b\sin A = a\sin B,$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Dans le second cas (*fig*. 62), les triangles ACH, BCH donnent :

$$CH = b\sin\widehat{CAH} = b\sin(180° - A) = b\sin A$$
$$CH = a\sin B,$$

d'où encore

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On démontrerait de même que l'on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C};$$

on a donc en définitive :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

ce qui démontre le théorème.

Seconde démonstration. Considérons le triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle; soit O son centre et soit R son rayon (*fig.* 63 et 64). Prenons le milieu I de l'arc BC compris

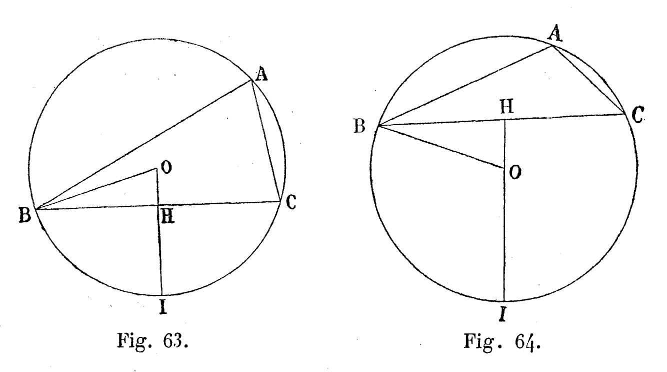


Fig. 63. Fig. 64.

entre les côtés de l'angle A, et menons la droite OI; cette droite est perpendiculaire à la corde BC, et le point H où elle la rencontre est le milieu de cette corde. Dans le triangle rectangle OHB, on a :

$$BH = OB \sin BOH.$$

BH est égal à $\frac{a}{2}$; OB est égal au rayon R du cercle. Quant à l'angle BOH, il est égal à l'angle BOI si l'angle A est aigu (*fig.* 63), et il est égal au supplément de l'angle BOI si l'angle A est obtus (*fig.* 64); dans les deux cas, le sinus de l'angle BOH

est égal au sinus de l'angle BOI. Or, l'angle au centre BOI a pour mesure l'arc BI, moitié de l'arc compris entre les côtés de l'angle inscrit A, donc il est égal à l'angle A, et l'on a, dans les deux cas,

$$\frac{a}{2} = \mathrm{R} \sin \mathrm{A},$$

ou

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = 2\mathrm{R}.$$

On démontrerait de même que l'on a :

$$\frac{b}{\sin \mathrm{B}} = 2\mathrm{R}, \qquad \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2\mathrm{R}.$$

On a donc enfin :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2\mathrm{R}.$$

188. **Corollaire.** Cette seconde démonstration nous montre que la valeur commune des rapports $\frac{a}{\sin \mathrm{A}}$, $\frac{b}{\sin \mathrm{B}}$, $\frac{c}{\sin \mathrm{C}}$, est égale au diamètre du cercle circonscrit, ou que : *Chaque côté d'un triangle est égal au diamètre du cercle circonscrit multiplié par le sinus de l'angle opposé.*

189. **Remarque.** Dans un triangle, il y a 6 éléments, 3 côtés et 3 angles ; on a vu, en géométrie, qu'il faut 3 éléments, dont un côté, pour déterminer un triangle ; donc entre les 6 éléments, il doit exister trois relations distinctes et trois seulement.

Considérons le groupe des trois relations

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \mathrm{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \mathrm{C}, \end{array} \right.$$

qui résultent du premier théorème ; ces 3 relations sont évidemment distinctes.

Soit en second lieu le groupe des trois relations

$$(\beta)\quad \begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A, \end{cases}$$

qui résultent du second théorème, appliqué successivement aux trois côtés du triangle.

Enfin considérons le groupe des trois relations

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 180^\circ, \end{cases}$$

résultant du troisième théorème, auxquelles on a adjoint la relation entre les trois angles du triangle, fournie par la géométrie.

D'après la remarque précédente, ces 9 équations doivent se réduire à trois équations distinctes. Nous allons démontrer que si a, b, c, sont des quantités positives ou négatives, mais non nulles, et A, B, C, des angles quelconques satisfaisant soit au système (α) soit au système (β), ces deux systèmes (α) et (β) sont équivalents ; nous démontrerons ensuite que, si on convient de ne considérer dans les formules (β) et (γ) que des angles positifs et moindres que 180°, et si de plus a, b, c, sont des quantités essentiellement positives, les systèmes (β) et (γ) sont équivalents; nous en conclurons que, avec les mêmes restrictions, les systèmes (α) et (γ) sont équivalents. Nous démontrerons enfin que si trois longueurs a, b, c, et trois angles A, B, C, positifs et moindres chacun que 180°, satisfont à l'un quelconque des groupes (α), (β), (γ), ces trois longueurs et ces trois angles sont les six éléments d'un triangle.

190. **Théorème I.** *Si a, b, c, sont des nombres positifs ou négatifs mais non nuls, si* A, B, C, *sont des angles quelconques, les systèmes* (α) *et* (β) *sont équivalents.*

Pour le démontrer, nous allons faire voir que, avec les restrictions de l'énoncé, si on suppose le système (α) vérifié, le système (β) l'est aussi, et réciproquement que, si on suppose le système (β) vérifié, le système (α) l'est également.

1° Supposons le système (α) vérifié; ajoutons membre à

membre les deux dernières équations de ce groupe, on obtient

$$b^2+c^2=2a^2+b^2+c^2-2a(b\cos C+c\cos B),$$

ou, en réduisant et divisant par a, quantité différente de zéro par hypothèse,

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

c'est la première équation du groupe (β); on obtiendrait de même les deux autres équations (β); donc, dans ces conditions, si le système (α) est vérifié, le système (β) est également vérifié.

2° Supposons inversement que, avec les mêmes restrictions, le système (β) soit vérifié ; multiplions la première des équations du groupe par a, la seconde par $-b$, la troisième par $-c$, et ajoutons, nous aurons, en simplifiant,

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A,$$

ou

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

On retrouverait de même les autres formules du système (α). Donc, *dans les conditions indiquées ci-dessus*, les deux systèmes (α) et (β) sont équivalents.

191. **Théorème II.** *Si a, b, c, sont les mesures de trois longueurs et si* A, B, C, *sont trois angles positifs et moindres chacun que* 180°, *les systèmes* (β) *et* (γ) *sont équivalents.*

1° Si le système (β) est vérifié avec les restrictions précédentes, le système (γ) l'est également. Proposons-nous d'abord de déduire du système (β) la relation

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

du système (γ). Remarquons que cette relation ne contient ni c, ni C; nous sommes donc conduits à éliminer c et C entre les trois équations (β). Éliminons d'abord C entre les deux premières; à cet effet, multiplions les deux membres de la première par a, les deux membres de la seconde par b, et retranchons membre à membre, nous aurons :

$$a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A).$$

Puis éliminons c entre cette équation et la dernière équation

du système (β) ; nous aurons :

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)(a \cos B - b \cos A),$$

ou

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$

ou, en remplaçant $1 - \cos^2 A$ par $\sin^2 A$ et $1 - \cos^2 B$ par $\sin^2 B$,

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A,$$

ou encore

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B}.$$

Extrayons les racines carrées, et remarquons que a et b sont positifs par hypothèse, que $\sin A$ et $\sin B$ sont positifs puisque les angles A et B sont positifs et moindres que 180° ; on aura donc :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

ce qu'il fallait démontrer. On aura de même :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Il reste à démontrer que la relation

$$A + B + C = 180^\circ$$

est une conséquence des formules (β). Nous venons de montrer que, dans les conditions de l'énoncé, si les relations (β) sont vérifiées, on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Remplaçons dans les relations (β) qui sont supposées vérifiées, et qui sont homogènes en a, b, c, ces quantités a, b, c, par les quantités proportionnelles $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$; nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \\ \sin B = \sin C \cos A + \sin A \cos C \\ \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A, \end{array}\right.$$

ou

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin A = \sin (B+C) \\ \sin B = \sin (A+C) \\ \sin C = \sin (A+B). \end{cases}$$

Or, chacun des angles A, B, C, étant positif et moindre que 180°, la somme de deux quelconques d'entre eux est positive et moindre que 360°; nous savons d'autre part que si deux angles, positifs et moindres que 360°, ont même sinus, ces deux angles ou bien sont égaux, ou bien sont supplémentaires. Or on ne peut pas avoir simultanément :

$$\begin{aligned} A &= B + C \\ B &= A + C \\ C &= A + B; \end{aligned}$$

car on en déduirait, en ajoutant, $A+B+C=0$, ce qui est impossible. Il faut donc, pour l'une au moins des égalités (1), que les angles soient supplémentaires ; mais si par exemple

$$B + C = 180^\circ - A,$$

d'où l'on déduit :

$$A + B + C = 180^\circ,$$

les deux autres relations sont vérifiées. Donc les relations (β) exigent, avec les restrictions de l'énoncé,

$$A + B + C = 180^\circ,$$

c'est-à-dire la troisième des équations (γ).

2° Réciproquement, dans les conditions de l'énoncé, si les relations (γ) sont vérifiées, les relations (β) le sont également. Proposons-nous de déduire des relations (γ) la première des relations (β); il faut pour cela entre les relations (γ) éliminer A; or on a, d'après les propriétés connues des rapports

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b\cos C + c\cos B}{\sin B\cos C + \sin C\cos B} = \frac{b\cos C + c\cos B}{\sin (B+C)}.$$

Mais de la troisième équation (γ) on déduit :

$$B + C = 180^\circ - A,$$

d'où

$$\sin(B+C)=\sin A;$$

on a donc:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b\cos C+c\cos B}{\sin A},$$

d'où

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

c'est-à-dire la première des relations (β). On obtiendrait de même les deux autres.

Il résulte des deux parties de la démonstration que, *dans les conditions ci-dessus énoncées*, les systèmes (β) et (γ) sont équivalents.

192. **Théorème III.** *Si* a, b, c, *sont les mesures de trois longueurs, et si* A, B, C, *sont trois angles positifs et moindres chacun que* 180°, *les systèmes* (α) et (γ) *sont équivalents.*

En effet, nous venons de voir qu'avec les restrictions de l'énoncé, les systèmes (β) et (γ) sont équivalents; d'autre part, dans ces mêmes conditions *particulières*, les systèmes (α) et (β) sont équivalents; donc, dans ces mêmes conditions, les systèmes (α) et (γ) sont équivalents.

193. **Théorème IV.** *Si trois longueurs positives* a, b, c, *et si trois angles* A, B, C, *tels que chacun est positif et moindre que* 180°, *satisfont aux équations de l'un des systèmes* (α), (β), (γ), *ces longueurs et ces angles sont les éléments d'un triangle.*

En effet, ces six grandeurs satisfaisant aux équations de l'un des trois systèmes équivalents (α), (β) et (γ), satisfont par cela même aux équations du système (α). Or, $b^2+c^2-2bc\cos A$ étant moindre que b^2+c^2+2bc, c'est-à-dire moindre que $(b+c)^2$, la première de ces relations fait voir que l'on a :

$$a<b+c;$$

on déduit de même des deux autres :

$$b<a+c,$$
$$c<a+b.$$

Chacune des longueurs a, b et c, étant moindre que la somme des deux autres, on peut construire un triangle dont les côtés

sont a, b et c. Soient A′, B′, C′ les angles de ce triangle ; on aura, en vertu du théorème du nº 184 :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'.$$

On a déjà, par hypothèse :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

et, en comparant ces deux relations, on en déduit :

$$\cos A = \cos A'.$$

Les angles A et A′, étant positifs et moindres que 180° et ayant le même cosinus, sont égaux. On verrait de même que l'angle B est égal à l'angle B′, et l'angle C égal à l'angle C′. Donc les six grandeurs données sont les six éléments d'un triangle.

194. **Remarque.** Il résulte de là que, toutes les fois qu'en résolvant un triangle, c'est-à-dire en calculant les côtés et les angles, on se sera servi de toutes les formules d'un seul des trois groupes (α), (β), (γ), il sera inutile de vérifier que les côtés sont tels que chacun d'eux est moindre que la somme des deux autres, et, si on ne s'est pas servi des trois relations (γ), il sera inutile de vérifier que la somme des trois angles vaut 180° ; les conditions de possibilité du triangle sont forcément remplies, comme le théorème IV le démontre.

§ III. — Résolution des triangles rectangles.

195. La résolution des triangles rectangles présente quatre cas. On peut donner :

1° L'hypoténuse avec un côté de l'angle droit ;

2° L'hypoténuse avec un angle aigu ;

3° Un côté de l'angle droit avec un angle aigu ;

4° Les deux côtés de l'angle droit.

196. **Premier cas.** *On donne l'hypoténuse a avec un côté de l'angle droit b ; calculer les angles* B, C *et le côté c.*

On détermine les angles par la formule :

$$(1) \qquad \sin B = \cos C = \frac{b}{a},$$



et le côté c par la formule :

$$(2) \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Comme l'angle B est donné par un sinus, on trouvera pour B deux valeurs supplémentaires ; mais, l'angle B étant aigu, on ne devra prendre que celle des deux valeurs qui est plus petite que 90°. Pour rendre la formule (2) calculable par logarithmes, on remplace la différence a^2-b^2 par le produit $(a+b)(a-b)$, et on a :

$$c=\sqrt{(a+b)(a-b)},$$

et, en prenant les logarithmes :

$$\log c=\frac{1}{2}\left[\log(a+b)+\log(a-b)\right].$$

197. **Remarque.** Lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ est très voisin de 1, l'angle B diffère peu de 90° ; dans ce cas, si l'on déduit l'angle B de la valeur de son sinus, on n'obtient l'angle qu'avec une approximation insuffisante. Il est préférable alors de calculer l'angle C par la formule suivante :

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

L'angle C étant calculé, on obtient l'angle B en prenant le complément de l'angle C.

198. **Deuxième cas.** *On donne l'hypoténuse a et l'angle aigu* B, *et l'on demande de calculer l'angle* C *et les deux côtés de l'angle droit b et c.*

L'angle C est le complément de l'angle B :

$$C=90°-B.$$

On obtient les côtés de l'angle droit b et c par les formules calculables par logarithmes :

$$b = a \sin B$$
$$c = a \cos B.$$

199. **Troisième cas.** *On donne un côté de l'angle droit b et l'un des angles aigus, B par exemple; calculer l'autre angle aigu C, l'hypoténuse a et l'autre côté de l'angle droit c.*

L'angle C est le complément de l'angle B;

$$C = 90° - B.$$

L'hypoténuse a et le côté c sont donnés par les formules .

$$a = \frac{b}{\sin B}$$
$$c = \frac{b}{\operatorname{tg} B}.$$

200. **Quatrième cas.** *On donne les deux côtés de l'angle droit b et c; calculer les angles B et C, et l'hypoténuse a.*

On calcule les angles B et C par les formules :

$$\operatorname{tg} B = \cot C = \frac{b}{c}. \tag{1}$$

Connaissant les angles, on calcule l'hypoténuse a par la formule :

$$a = \frac{b}{\sin B}. \tag{2}$$

201. **Remarque.** On pourrait aussi déterminer directement l'hypoténuse du triangle sans calculer les angles. Il suffirait d'employer la formule :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}. \tag{3}$$

Mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes; aussi on préfère employer le premier procédé.

On peut cependant se proposer de rendre la formule (3) calculable par logarithmes, en employant un angle auxiliaire.

A cet effet, on écrit cette formule sous la forme suivante :

$$a = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}},$$

et on pose :

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c}.$$

On a ainsi :

$$(5) \qquad a = \frac{b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}.$$

On calculera l'angle auxiliaire φ par la formule (4); puis ensuite on calculera a par la formule (5). Mais il est à remarquer que l'angle auxiliaire φ est précisément l'angle B du triangle, de sorte que ce second procédé conduit identiquement aux mêmes calculs que le premier.

§ IV. — Résolution des triangles quelconques.

202. La résolution des triangles quelconques présente quatre cas principaux. On peut donner :

1° Un côté et deux angles ;

2° Deux côtés et l'angle compris ;

3° Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ;

4° Les trois côtés.

203. **Premier cas.** *On donne un côté* a *et deux angles* B *et* C; *on demande de calculer l'angle* A, *les côtés* b *et* c, *et l'aire* S *du triangle.*

L'angle A est le supplément de la somme des angles B et C :

$$A = 180° - (B + C).$$

Des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

on déduit les formules :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

qui permettent de calculer b et c.

204. Pour évaluer la surface S du triangle, abaissons, du sommet A, la perpendiculaire AH sur BC (*fig.* 65). On a :

$$S = \frac{1}{2} a \times AH.$$

Or, $AH = b \sin C$; et, en remplaçant b par $\frac{a \sin B}{\sin A}$, on a :

$$AH = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A};$$

donc enfin

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

formule calculable par logarithmes.

Fig. 65.

205. Pour que l'angle calculé A soit positif, il faut que la somme des angles donnés B et C soit moindre que 180°. Cette condition remplie, le problème est toujours possible et n'admet qu'une solution. Ce fait, qui a été démontré en géométrie, résulte encore de ce que les grandeurs données a, B, C, et les grandeurs calculées A, b, c, vérifient les équations du système (γ), et sont par conséquent (chaque angle étant moindre que 180°), les six éléments d'un triangle (193).

206. **Deuxième cas.** *On donne deux côtés a, b, et l'angle compris* C, *et l'on demande de calculer les deux angles* A *et* B, *le troisième côté c, et la surface* S.

La somme des angles inconnus A et B est le supplément de l'angle donné C; donc

$$A + B = 180° - C,$$

d'où

$$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}.$$

On cherche la demi-différence de ces angles; à cet effet, de la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

on déduit, d'après les propriétés des rapports,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B},$$

d'où

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.$$

Or, nous avons vu (145) que

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}};$$

on a donc

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b},$$

d'où

(1) $$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Cette formule permet de calculer $\frac{A-B}{2}$; et comme on a déjà $\frac{A+B}{2}$, on en déduit aisément A et B.

Connaissant les angles A et B, on calculera le côté c par la formule

(2) $$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

207. Le problème est toujours possible et n'admet qu'une solution. Ce fait, démontré en géométrie, résulte encore de ce que les grandeurs données a, b et C, et les grandeurs calculées A, B, c, vérifient les équations du système (γ), et sont par conséquent, chaque angle étant positif et moindre que 180°, les six éléments d'un triangle (193).

208. **Remarque I.** Pour calculer c par la formule (2) on devra employer trois logarithmes nouveaux, savoir : log a, log sin C, et log sin A. On peut remplacer cette formule par une autre dans laquelle, au lieu de log a, on introduit log $(a+b)$, logarithme qui a déjà servi dans les calculs précédents. On a en effet :

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B},$$

d'où

$$c = \frac{(a+b)\sin C}{\sin A + \sin B},$$

et, en remplaçant $\sin A + \sin B$ par $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ et $\sin C$ par $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$c = \frac{2(a+b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}};$$

si l'on remarque que $\cos\frac{C}{2}$ est égal à $\sin\frac{A+B}{2}$, on a, en simplifiant,

$$(3) \qquad c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

formule qui n'exige que deux nouveaux logarithmes.

209. **Remarque II.** On pourrait se proposer de déterminer directement le troisième côté c, sans calculer les angles A et B ; on emploierait alors la formule

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes, et si on veut la rendre calculable, on est ramené, en employant

le moins d'angles auxiliaires possible, à un calcul identique ou équivalent au calcul que l'on fait en se servant des angles calculés.

A cet effet, on remplace, dans cette formule, $\cos C$ par $\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$, et a^2+b^2 par la quantité égale

$$(a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

On a ainsi :

$$c^2=(a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)-2ab\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

ou

$$c^2=(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2},$$

ou encore

$$c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}\left[1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\cot^2\frac{C}{2}\right].$$

Posons :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}, \tag{4}$$

nous aurons :

$$c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}(1+\operatorname{tg}^2\varphi),$$

ou

$$c^2=(a+b)^2\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\varphi},$$

ou enfin

$$c=(a+b)\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Cette dernière formule est calculable par logarithmes; mais pour l'employer il faut calculer l'angle auxiliaire φ. Or, on voit, par la comparaison des formules (1) et (4), que l'angle φ est précisément l'angle $\frac{A-B}{2}$ que l'on aurait calculé par le

procédé ordinaire, puisque, $\frac{A+B}{2}$ étant égal à $90^\circ - \frac{C}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ es égale à $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$; d'ailleurs la formule (5) est identique à la formule (3). Donc ce second procédé conduit aux mêmes calculs que le premier.

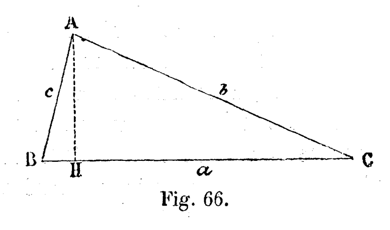


Fig. 66.

210. Pour évaluer la surface S du triangle, menons, du point A, la perpendiculaire AH sur le côté BC (*fig.* 66). On a :

$$S = \frac{1}{2} a \times AH, \qquad AH = b \sin C,$$

donc

$$(6) \qquad S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

211. Si l'on désigne par R le rayon du cercle circonscrit, on a :

$$\sin C = \frac{c}{2R},$$

et, en remplaçant $\sin C$ par $\frac{c}{2R}$ dans la formule précédente, on obtient la formule remarquable

$$(7) \qquad S = \frac{abc}{4R}.$$

212. Lorsque l'on voudra dans ce cas résoudre un triangle, il conviendra, si l'on n'a pas besoin d'évaluer la surface, de calculer le côté c au moyen de la formule (3) ; car pour calculer c il suffira de calculer deux nouveaux logarithmes, $\log \sin \frac{C}{2}$ ou $\log \cos \frac{A+B}{2}$ qui se trouvent, dans les tables, à la même page et à la même ligne que $\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$ que l'on a déjà

calculé, et log cos $\frac{A-B}{2}$, qui se trouve à la même page et sur la même ligne que log tg $\frac{A-B}{2}$ qui a servi au calcul de $\frac{A-B}{2}$. Si au contraire on doit calculer la surface S, la formule (2) sera préférable pour le calcul de c, car pour calculer la surface il suffira de calculer un nouveau logarithme seulement, log b.

213. **Cas particulier remarquable.** Il arrive quelquefois que les côtés a et b sont connus seulement par leurs logarithmes; dans ce cas, il est inutile de revenir des logarithmes de ces côtés à leurs longueurs, pour résoudre le triangle.

Pour cela on écrit :

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2};$$

on pose

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},$$

d'où

$$\log\operatorname{tg}\varphi=\log b-\log a,$$

ce qui donne l'angle φ, et on a :

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2},$$

ou (147)

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

Si on appelle a le plus grand des deux côtés a et b, l'angle φ est plus petit que 45° et tg $\frac{A-B}{2}$ est positive, ce qui entraîne $A>B$, résultat évident.

Dans ce cas, on calculera c, que l'on ait besoin ou non de la surface, par la formule (2).

214. **Troisième cas.** *On donne deux côtés a, b, d'un triangle et l'angle* A *opposé au côté a, et l'on demande de calculer les deux autres angles* B *et* C, *le troisième côté c, et la surface* S.

L'angle B est donné par la formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

L'angle B étant connu, l'angle C est donné par la formule

$$C = 180° - (A + B).$$

Le côté c est donné par la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

et la surface S, par la formule

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

215. *Discussion*. Rappelons d'abord la solution géométrique du problème; sur l'un des côtés de l'angle donné CAR (*fig.* 67), portons une longueur AC égale à b, puis du point C comme centre, avec un rayon égal à a, décrivons une circonférence; soit B un point où cette circonférence rencontre le côté AR de l'angle donné; le triangle ABC satisfait aux conditions du problème.

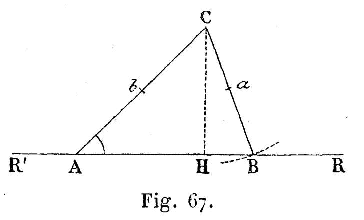


Fig. 67.

Donc, selon que la circonférence décrite du point C comme centre, avec a pour rayon, rencontre la portion AR de la droite indéfinie R'R en deux points, en un point, ou ne la rencontre pas, le problème admet deux solutions, une solution, ou n'en admet pas.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que la circonférence employée rencontre la droite indéfinie RR', et pour cela il faut que a soit supérieur ou égal à la perpendiculaire CH abaissée du point C sur la droite RR'. Or, cette perpendiculaire est égale ou à $b \sin A$, ou à $b \sin(180° - A)$, c'est-à-dire dans tous les cas à $b \sin A$. Le problème est donc impos-

sible, à moins que l'on n'ait :

$$a \geqslant b \sin A.$$

Supposons cette condition remplie. La circonférence employée rencontre la droite RR'; pour distinguer les cas qui peuvent se présenter, supposons successivement l'angle A aigu, droit, ou obtus.

1° L'angle A est aigu (*fig.* 68). Si a est égal à $b \sin A$, la circonférence est tangente en H à RR', et le triangle rectangle ACH répond seul à la question. — Si a est plus grand que $b \sin A$ et moindre que b, la circonférence rencontre la droite RR' en deux points B et B' situés sur la portion AR de cette droite, et les deux triangles ACB, ACB' répondent à la question. — Si a est égal à b, le point B' se confond avec le point A, le triangle ACB' se réduit à une droite, l'autre devient isocèle. — Si a est plus grand que b, les deux points de rencontre B et B' sont, l'un sur la portion AR de la droite RR', l'autre sur la portion AR', et, par conséquent, le premier seul convient, et le problème n'a qu'une solution.

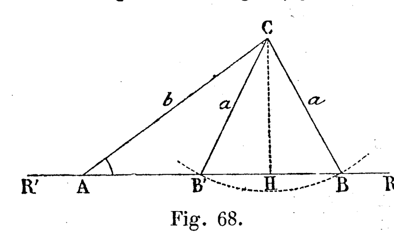


Fig. 68.

2° L'angle A est obtus (*fig.* 69). Si a est plus grand que b, la circonférence rencontre la droite RR' en deux points B et B' situés l'un sur AR, l'autre sur AR'; le premier convient, le second ne convient pas, le problème admet une solution. — Si a est égal à b, le point B se confond avec le point A, le triangle ACB est réduit à une droite. — Si a est moindre que b, les points de rencontre sont tous les deux sur la portion AR' de la droite RR', et le problème est impossible.

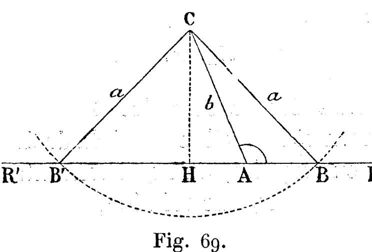


Fig. 69.

3° L'angle A est droit (*fig.* 70). Dans ce cas, les deux portions AR et AR' de la droite RR' faisant le même angle avec la droite

AC, il n'y a plus lieu de distinguer ces deux portions de la droite indéfinie. — Si a est supérieur à b, la circonférence rencontre la droite RR' aux deux points B et B' symétriques par rapport au point A. Les deux triangles ACB, ACB' répondent à la question ; mais comme ils sont égaux, nous dirons que le problème n'admet qu'une solution. — Si a est égal à b, le triangle ABC est réduit à une droite ; a ne peut être moindre que b, puisque par hypothèse $\sin A = 1$, et $a \geqslant b \sin A$.

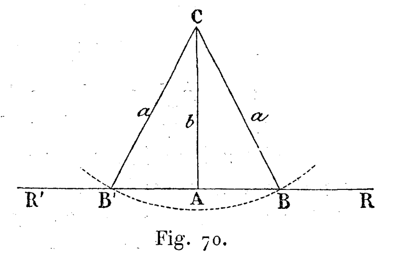


Fig. 70.

Nous pouvons résumer comme il suit les résultats de cette discussion.

$a < b \sin A$		....	0 solution.
$a \geqslant b \sin A$	$A < 90°$	$a = b \sin A$	1 solution.
		$b \sin A < a < b$ ...	2 solutions.
		$a \geqslant b$	1 solution.
	$A > 90°$	$a > b$	1 solution.
		$b \sin A \leqslant a \leqslant b$ ...	0 solution.
	$A = 90°$	$a > b$	1 solution.
		$a = b$	0 solution.

216. On arrive aisément aux mêmes conclusions en discutant les formules que nous avons données pour résoudre le triangle. D'abord, l'angle B étant donné par la formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

il faut que la valeur de $\sin B$, ou $\dfrac{b \sin A}{a}$ soit inférieure ou égale à 1. Donc, si l'on a :

$$a < b \sin A,$$

le problème est impossible.

Supposons :

$$a > b \sin A.$$

La valeur de $\sin B$ étant positive et moindre que 1, on a pour B deux valeurs supplémentaires, que je désignerai par B′ et par B″, B′ représentant la valeur de l'angle aigu. L'angle C est donné par la formule

$$C = 180^\circ - A - B.$$

Pour que cet angle convienne, il faut et il suffit qu'il soit positif; donc, pour qu'une valeur de B convienne, il faut et il suffit qu'elle soit moindre que $180^\circ - A$. Examinons le cas où A est aigu, obtus, ou droit.

1° A est aigu. Alors, $180^\circ - A$ est obtus, et par conséquent l'angle aigu B′ convient. Pour que l'angle B″ convienne, il faut que l'on ait :

$$B'' < 180^\circ - A,$$

ou, ces deux angles étant obtus,

$$\sin B'' > \sin(180^\circ - A),$$

ou encore

$$\sin B'' > \sin A.$$

Mais $\sin B''$ est égal à $\frac{b \sin A}{a}$; donc, pour que B″ convienne, il faut et il suffit que l'on ait :

$$b > a.$$

2° A est obtus. Alors, $180^\circ - A$ est aigu, et par conséquent l'angle obtus B″ ne peut convenir. Pour que l'angle aigu B′ convienne, il faut que l'on ait :

$$B' < 180^\circ - A,$$

ou, ces deux angles étant aigus,

$$\sin B' < \sin(180^\circ - A),$$

ou encore

$$\sin B' < \sin A.$$

Comme d'ailleurs $\sin B' = \frac{b \sin A}{a}$, cette condition revient à

$$b < a.$$

3° L'angle A est droit. Dans ce cas, $\sin A = 1$, et la condition $a > b \sin A$ se réduit à $a > b$. L'angle $180° - A$ est égal à $90°$; par conséquent, l'angle aigu B′ convient, et l'angle obtus B″ ne convient pas.

Supposons enfin :

$$a = b \sin A;$$

la valeur de $\sin B$ est 1, et les angles B′ et B″ sont égaux à 90°. Les deux solutions n'en font qu'une, et pour que cette solution soit acceptable, il faut que l'on ait :

$$90° < 180° - A,$$

ou

$$A < 90°.$$

La discussion est résumée dans le tableau suivant :

$a < b \sin A$			0 solution.
$a > b \sin A$	$A < 90°$	$a < b$ ...	2 solutions.
		$a \geqslant b$ ...	1 solution.
	$A > 90°$	$a > b$ ...	1 solution.
		$a \leqslant b$ ...	0 solution.
	$A = 90°$		1 solution.
$a = b \sin A$	$A < 90°$		1 solution.
	$A \geqslant 90°$		0 solution.

Il est facile de reconnaître que les résultats de cette discussion, bien que présentés dans un ordre un peu différent, sont les mêmes que ceux que nous avons trouvés en discutant la solution géométrique.

217. Calcul direct du côté *c*. Par la méthode que nous avons donnée n° 214 pour calculer le côté c d'un triangle, connaissant deux côtés a et b, et l'angle A opposé au côté a, on calcule d'abord l'angle B, puis l'angle C, puis enfin le côté c, par la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

On peut se proposer de calculer directement c en fonction des

données a, b, et A. On se servira alors de la relation

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

qui lie l'angle A aux trois côtés du triangle ; c est l'une des racines de l'équation

$$(1) \qquad c^2 - 2bc\cos A + (b^2 - a^2) = 0,$$

et le problème admet zéro, une, ou deux solutions, selon que le nombre de racines réelles et positives de cette équation est zéro, un, ou deux.

Pour que les racines de l'équation (1) soient réelles, il faut que l'on ait :

$$b^2\cos^2 A - b^2 + a^2 \geqslant 0,$$

ou

$$a^2 \geqslant b^2 \sin^2 A,$$

ou, puisque a, b, et $\sin A$, sont des quantités essentiellement positives,

$$a \geqslant b \sin A.$$

Supposons d'abord :

$$a > b \sin A.$$

Les racines de l'équation (1) sont réelles et distinctes. Leur produit étant $b^2 - a^2$, elles sont de même signe, ou de signes contraires, selon que a est plus petit que b ou plus grand que b.

1° Soit $a < b$. Les racines sont de même signe ; leur somme étant $2b\cos A$, elles sont positives si $\cos A$ est positif, et négatives si $\cos A$ est négatif. Donc, si l'angle A est aigu, le problème admet deux solutions, et s'il est obtus, le problème est impossible.

2° Soit $a > b$. Les racines sont de signes contraires ; la racine positive convient, la racine négative ne convient pas ; le problème admet une solution.

3° Soit $a = b$; l'une des racines est nulle, l'autre est égale à $2b\cos A$; si A est aigu, cette racine est positive, le problème admet une solution ; s'il est obtus, cette racine est négative, le problème est impossible.

Supposons en second lieu

$$a = b \sin A;$$

les racines de l'équation (1) sont égales, et, comme leur somme est $2b\cos A$, chacune d'elles est égale à $b\cos A$. Si A est obtus, cette racine double est négative et ne convient pas; si A est droit, la racine double est nulle et ne convient pas; si A est aigu, elle est positive et convient. D'ailleurs, dans ce cas, le carré de la racine étant $b^2 - a^2$, on a $c^2 = b^2 - a^2$, ou $b^2 = a^2 + c^2$, et l'angle B est droit.

Les résultats de cette discussion peuvent être résumés dans le tableau suivant :

$a < b \sin A$			0 solution.
$a > b \sin A$	$a < b$	$A < 90^\circ$	2 solutions.
		$A > 90^\circ$	0 solution.
	$a > b$		1 solution.
	$a = b$	$A < 90^\circ$	1 solution.
		$A > 90^\circ$	0 solution.
$a = b \sin A$	$A < 90^\circ$		1 solution.
	$A \geqslant 90^\circ$		0 solution.

Il est facile de voir que les résultats de cette discussion, bien que présentés dans un autre ordre, sont d'accord avec les résultats trouvés précédemment.

218\. Les racines de l'équation (1) sont :

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Ces valeurs ne sont pas calculables par logarithmes; on peut se proposer de les rendre calculables par logarithmes au moyen d'un angle auxiliaire. A cet effet, mettons a en facteur dans le second membre; a étant positif, on a

$$c = a\left(\frac{b}{a}\cos A \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}\right).$$

La quantité $\frac{b^2}{a^2}\sin^2 A$ devant être inférieure ou égale à 1, pour

que les valeurs de c soient réelles, on peut poser

$$\sin\varphi = \frac{b}{a}\sin A,$$

et l'angle auxiliaire φ, que nous pouvons toujours prendre moindre que 90°, pourra être calculé par logarithmes.

On aura ainsi

$$c = a\left[\frac{b}{a}\cos A \pm \cos\varphi\right],$$

et, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par $\frac{\sin\varphi}{\sin A}$, on aura :

$$c = \frac{a[\sin\varphi\cos A \pm \cos\varphi\sin A]}{\sin A},$$

ou :

$$c = \frac{a\sin(\varphi \pm A)}{\sin A},$$

et, en appelant c' et c'' les deux valeurs de c, on a :

$$c' = \frac{a\sin(\varphi + A)}{\sin A}, \qquad c'' = \frac{a\sin(\varphi - A)}{\sin A}.$$

Mais il est à remarquer que l'angle auxiliaire φ n'est autre chose que l'angle aigu B′, dont le sinus est $\frac{b\sin A}{a}$, angle dont nous avons voulu éviter le calcul. De plus, si nous appelons C′ et C″ les angles qui correspondent aux valeurs B′ et B″ de B, on a :

$$\sin(\varphi + A) = \sin(B' + A) = \sin(180° - B' - A) = \sin C',$$

d'où :

$$c' = \frac{a\sin(\varphi + A)}{\sin A} = \frac{a\sin C'}{\sin A};$$

de même,

$$\sin(\varphi - A) = \sin(B' - A) = \sin(180° - B'' - A) = \sin C'',$$

d'où :

$$c'' = \frac{a \sin(\varphi - A)}{\sin A} = \frac{a \sin C''}{\sin A},$$

et, par conséquent, cette solution conduit absolument aux mêmes calculs que la première.

219. **Quatrième cas.** *On donne les trois côtés* a, b, c, *d'un triangle, et l'on demande les trois angles* A, B, C *et la surface* S.

On peut déduire l'angle A de la première formule du système (α) (189) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

d'où :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cette formule n'est pas calculable par logarithmes, mais on peut en déduire d'autres formules calculables par logarithmes.

Remarquons que les angles A, B, C, étant moindres que 180°, les moitiés de ces angles sont moindres que 90°, donc le sinus, le cosinus, la tangente, de la moitié de chacun des angles sont positifs. On a donc :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \text{et} \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

Formons les quantités $1 - \cos A$ et $1 + \cos A$; on a :

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc},$$

et, en remplaçant $a^2 - (b - c)^2$, différence de deux carrés, par le produit $(a + b - c)(a - b + c)$:

$$1 - \cos A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc},$$

d'où :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4bc}}.$$

On a de même :

$$1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

et par suite :

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Si nous désignons par $2p$ le périmètre du triangle, nous aurons :

$$(1)\quad \begin{cases} a+b+c=2p \\ b+c-a=2(p-a) \\ a+c-b=2(p-b) \\ a+b-c=2(p-c) \end{cases}$$

et, par suite :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \text{et} \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

En opérant de même sur les deux autres équations du système (α), nous transformerons ce système dans les deux systèmes suivants (2) et (3), équivalents respectivement au système (α) :

$$(2)\begin{cases} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \end{cases}$$

Enfin, en divisant membre à membre les équations correspondantes des systèmes (2) et (3), nous formerons encore un système (4) équivalent au système (α):

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned}\right.$$

220. Pour calculer les angles A, B et C, on peut employer ou les formules (2), ou les formules (3), ou les formules (4). Les dernières sont les plus avantageuses : d'abord elles n'exigent l'emploi que de quatre logarithmes différents, tandis que les formules (2) ou (3) exigent l'emploi de six ou de sept logarithmes; de plus, et c'est là le point important, ces formules permettront de calculer les angles cherchés avec une plus grande approximation (141).

221. Pour obtenir la surface S du triangle, nous avons :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

or,

$$\sin A = 2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donc :

$$(5)\qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

222. **Remarque.** Si l'on désigne par une seule lettre r la quantité

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

les formules (4) se simplifient et deviennent les formules (6) :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{r}{p-a} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \frac{r}{p-b} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{r}{p-c}. \end{aligned}\right.$$

On a, en effet :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\times\frac{1}{p-a},$$

ou :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},$$

et de même pour $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, et pour $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

La formule (5) devient alors

$$(7) \qquad S=pr.$$

223. Il est facile de voir que la quantité r, que nous introduisons ici pour simplifier les calculs, est le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

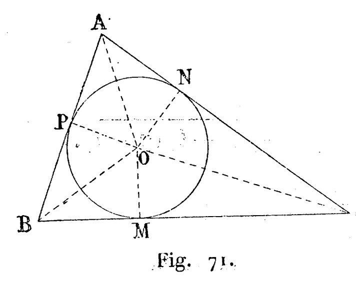


Fig. 71.

En effet, soit O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (*fig.* 71), appelons r le rayon de ce cercle. La surface du triangle ABC est la somme des surfaces des triangles OBC OAC, OAB. Ces triangles ont tous pour hauteur le rayon r du cercle inscrit, et pour base le premier a, le second b, le troisième c. Donc la surface du triangle est égale à

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r,$$

ou à pr; d'ailleurs elle est égale à

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

donc on a :

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

224. Pour faire le calcul du triangle, on commencera par faire la somme $a+b+c$, somme qui est égale à $2p$; on en prendra la moitié, ce qui donnera p; ayant p, on en retranchera successivement a, b, c, ce qui donnera les trois quantités $p-a$, $p-b$, $p-c$. Ceci fait, on calculera $\log r$ au moyen de la formule

$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) - \log p\right];$$

on calculera ensuite les angles A, B, C, au moyen des formules

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \log r - \log(p-a)$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \log r - \log(p-b)$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \log r - \log(p-c);$$

enfin on calculera la surface S par la formule

$$\log S = \log p + \log r.$$

Les angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ sont calculés ainsi au moyen de leurs tangentes, et, par suite, (140), l'erreur commise sur chacun d'eux est moindre que $0'',03$; donc l'erreur commise sur chacun des angles A, B, C, du triangle est moindre que $0'',06$ et par suite l'erreur commise sur la somme

$$A + B + C$$

est moindre que $0'',06 \times 3$ ou $0'',18$; si donc on ne s'est pas trompé dans les calculs, la somme $A+B+C$ des trois angles calculés ne doit pas différer de $180°$ de plus de $0'',18$; on ne devra pas oublier de faire cette vérification, qui, si elle ne se fait pas dans les conditions indiquées, montre que les calculs sont inexacts.

225. *Discussion.* On a vu, en géométrie, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'avec trois longueurs données on puisse construire un triangle, c'est que l'une de ces longueurs soit à la fois plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence, ou, ce qui revient au même, que chacune de ces longueurs soit moindre que la somme des deux autres. C'est sur ce fait que nous nous sommes appuyés pour démontrer (193) que si trois longueurs et trois angles positifs dont chacun est moindre que 180°, vérifient les équations de l'un des systèmes (α), (β), (γ), ces six grandeurs sont les éléments d'un triangle. On peut se proposer, comme exercice, de retrouver ces conditions en discutant les formules précédentes.

226. Supposons d'abord qu'on calcule les angles A, B et C, au moyen des formules (2), qui donnent les sinus des moitiés de ces angles; l'angle A sera déterminé par la formule

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

ou, en remplaçant $2p$ par $a+b+c$:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc}}.$$

Il faut que la valeur de $\sin\frac{A}{2}$ soit réelle et moindre que 1. Pour qu'elle soit réelle, il faut que l'on ait :

$$a+c-b>0, \quad \text{avec} \quad a+b-c>0,$$

ou

$$a+c-b<0, \quad \text{avec} \quad a+b-c<0.$$

Mais ces dernières inégalités sont incompatibles, car, en les ajoutant membre à membre, on aurait :

$$2a<0,$$

ce qui est impossible, les longueurs données a, b, c, étant né-

cessairement positives ; il faut donc que l'on ait :

$$a + c - b > 0, \quad \text{avec} \quad a + b - c > 0,$$

c'est-à-dire

$$b < a + c, \quad \text{avec} \quad c < a + b.$$

Pour que la valeur de $\sin \frac{A}{2}$ soit moindre que 1, il faut encore que l'on ait :

$$(a + c - b)(a + b - c) < 4\,bc,$$

ou

$$a^2 - (c - b)^2 < 4bc,$$

ou

$$a^2 < (b + c)^2,$$

ou enfin, puisque a et $b + c$ sont des quantités positives :

$$a < b + c.$$

On trouve de même que, pour que les valeurs de $\sin \frac{B}{2}$ et de $\sin \frac{C}{2}$ soient réelles et moindres que 1, les conditions nécessaires et suffisantes sont :

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b.$$

D'ailleurs, si ces conditions sont remplies, on calcule, au moyen des formules (2), pour les angles A, B, C, des valeurs positives et moindres que 180°, qui avec les longueurs données a, b, c, vérifient les équations du système (α) et, par conséquent, sont les six éléments d'un triangle. Ces conditions sont donc nécessaires et suffisantes.

On discuterait de même les formules (3) qui donnent les cosinus des moitiés des angles cherchés.

227. Prenons encore les formules qui donnent les tangentes des moitiés des angles. On calcule d'abord r par la formule

$$r = \sqrt{\frac{(p - a(p - b)(p - c)}{p}}.$$

Pour que cette quantité soit réelle, il faut et il suffit que le produit

$$(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$$

soit positif. Ceci exige, ou que les trois facteurs soient positifs, ou que deux soient négatifs et l'autre positif.

Or il est impossible que deux de ces facteurs soient négatifs; car, si l'on avait, par exemple,

$$p-a<0 \quad \text{et} \quad p-b<0$$

on en déduirait, en ajoutant membre à membre ces inégalités,

$$2p-(a+b)<0,$$

ou en remplaçant $2p$ par sa valeur $a+b+c$,

$$c<0,$$

ce qui est impossible.

Il faut donc que l'on ait

$$p-a>0 \qquad p-b>0 \qquad p-c>0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$a<b+c \qquad b<a+c \qquad c<a+b.$$

D'ailleurs, ces conditions étant remplies, on déduit des formules (6)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b} \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

des valeurs réelles et positives pour $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; et par suite des valeurs moindres que 180° pour les angles A, B et C, valeurs qui avec les côtés donnés a, b, c, vérifient les équations du système (α) et, par conséquent, sont les éléments d'un triangle.

§ V. — APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

228. **Remarques sur la résolution numérique des triangles.** Lorsque l'on veut résoudre numériquement un triangle,



il convient, pour la rapidité des calculs, de disposer les opérations et de diriger les calculs d'une façon particulière. On commence, avant de chercher aucun logarithme dans les tables, par faire le canevas des opérations futures ; pour cela, au haut de la page, on écrit, comme dans les exemples suivants, les données à gauche, et on prépare à droite et en face le tableau des résultats ; au-dessous on écrit, dans une seule ligne et dans leur ordre, les formules dont on doit se servir pour la résolution. On partage alors la feuille en deux colonnes, afin, ce qui est essentiel, que tous les calculs soient effectués sur une seule page ; on dispose successivement, en les indiquant nettement et en les séparant les uns des autres par un trait, les calculs résultant des formules que l'on doit employer ; on prépare toutes les opérations nécessaires, tout aussi bien comme additions ou soustractions que comme recherches des logarithmes ou comme retours des logarithmes aux nombres. Lorsque tout le travail préliminaire de disposition des calculs est achevé, et alors seulement, on ouvre les tables de logarithmes, en commençant par la recherche des logarithmes des nombres, et continuant par la recherche des logarithmes des lignes trigonométriques des angles donnés, en ayant soin de noter, à droite de chacun d'eux, comme nous l'avons dit (134), les calculs auxiliaires dus à l'emploi des parties proportionnelles. Les logarithmes étant écrits, on effectue les additions et les soustractions indiquées, puis, au moyen des tables, on revient des logarithmes aux nombres, et on écrit les résultats au haut de la page à la place marquée.

Si quelques calculs auxiliaires de logarithmes doivent être effectués à part, on les dispose à la fin du tableau de résolution du triangle sous le titre : calculs auxiliaires.

PREMIER CAS.

Données. $\begin{cases} a = 2543,43 \\ B = 53^\circ 57' 15'',6 \\ C = 64^\circ 12' 47'',5 \end{cases}$ **Résultats.** $\begin{cases} A = 61^\circ 49' 56'',9 \\ b = 2332,751 \\ c = 2597,808 \\ S = 2671178. \end{cases}$

$A = 180^\circ - (B + C)$, $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$, $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$.

Calcul de A.

$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$
$B + C = 118^\circ 10' \ 3'',1$
$A = \ 61^\circ 49' 56'',9$

Calcul de b.

$\log a = 3,4054198$	147 / 51	$\Delta = 170$
$\log \sin B = \bar{1},9077059,6$	6974	$\Delta = 153$
colog $\sin A = 0,0547426,1$	76,5 / 9,1	
$\log b = 3,3678683,7$		$\Delta = 186$
23327,51	589	
	94,7	
$b = 2332,751$		

Calcul de c.

$\log a = 3,4054198$		
$\log \sin C = \bar{1},9544446,5$	370	$\Delta = 102$
colog $\sin A = 0,0547426,1$	71,4 / 5,1	
$\log c = 3,4146070,6$		
25978,08	57	$\Delta = 167$
	13,6	
$c = 2597,808$		

Calcul de S.

$2 \log a = 6,8108396$		
$\log \sin B = \bar{1},9077059,6$		
$\log \sin C = \bar{1},9544446,5$		
colog $\sin A = 0,0547426,1$		
colog $2 = \bar{1},6989700$		
$\log S = 6,4267028,2$		$\Delta = 163$
26711,78	6901	
	127,2	
$S = 2671178$		

Calculs auxiliaires.

$\log \sin A = \bar{1},9452573,9$ 496 / 67,8 / 10,1 $\Delta = 113$

$\log 2 = 0,3010300$

DEUXIÈME CAS.

Données. $\begin{cases} a = 45325{,}46 \\ b = 26732{,}14 \\ C = 76^\circ\, 43'\, 53'',6 \end{cases}$ **Résultats.** $\begin{cases} A = 69^\circ\, 41'\, 16'',8 \\ B = 33^\circ\, 34'\, 49'',6 \\ c = 47040{,}69 \\ S = 589651100. \end{cases}$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}, \qquad c = \frac{a\sin C}{\sin A}, \qquad S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Calcul des angles.

$90^\circ = 89^\circ\, 59'\, 60''$

$\frac{C}{2} = 38^\circ\, 21'\, 56'',8$

$\frac{A+B}{2} = 51^\circ\, 38'\, 3'',2$

$\log(a-b) = 4{,}2693569{,}5$ 495   69,9 $\Delta = 233$

$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0{,}1014842{,}5$ 4,6   704 $\Delta = 433$

$\operatorname{colog}(a+b) = \bar{5}{,}1423202$ 129,9   8,6

$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1}{,}5131614{,}0$

$18^\circ\, 3'\, 10''$ 355 $\Delta = 715$

$3'',6$ 259   2590 | 715

$\frac{A-B}{2} = 18^\circ\, 3'\, 13'',6$ 4450 | $3'',6$

$\frac{A+B}{2} = 51^\circ\, 38'\, 3'',2$

$\frac{A-B}{2} = 18^\circ\, 3'\, 13'',6$

$A = 69^\circ\, 41'\, 16'',8$

$B = 33^\circ\, 34'\, 49'',6$

Calcul de c.

$\log a = 4{,}6563422{,}1$ 378   38,4 $\Delta = 96$

$\log\sin C = \bar{1}{,}9882491{,}6$ 5,7   474 $\Delta = 49$

$\operatorname{colog}\sin A = 0{,}0278822{,}7$ 14,7   2,9

$\log c = 4{,}6724736{,}4$

$47040{,}69$ 673 $\Delta = 92$

63,4

$c = 47040{,}69$

Calcul de S.

$\log a = 4{,}6563422{,}1$

$\log b = 4{,}4270337{,}6$ 315   16,2 $\Delta = 162$

6,4

$\log\sin C = \bar{1}{,}9882491{,}6$

$\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}6989700$

$\log S = 8{,}7705951{,}3$

$58965{,}11$ 943 $\Delta = 74$

8,3

$S = 589651100$

Calculs auxiliaires.

$a + b = 72057{,}6$

$a - b = 18593{,}32$

$\log(a+b) = 4{,}8576798$ 762   36 $\Delta = 60$

$\log\sin A = \bar{1}{,}9721177{,}3$ 125 $\Delta = 77$

46,2

6,1

TROISIÈME CAS.

Données. $\begin{cases} a = 1879,427 \\ b = 2675,942 \\ A = 29^\circ\,25'\,17'',5 \end{cases}$ **Résultats.** $\begin{cases} B' = 44^\circ 22' 49'',3 \\ C' = 106^\circ 11' 53'',2 \\ c' = 3674,073 \end{cases}$ $\begin{cases} B'' = 135^\circ 37' 10'',7 \\ C'' = 14^\circ 57' 31'',8 \\ c'' = 987,5737. \end{cases}$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \qquad C = 180^\circ - (A + B), \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Calcul de B'.

		699	
$\log b = 3,4274767$		64,8	$\Delta = 162$
		3,2	
$\log \sin A = \bar{1},6912858,5$		578	$\Delta = 374$
		261,8	
$\operatorname{colog} a = \bar{4},7259745,7$		18,7	
$\log \sin B = \bar{1},8447371,2$			
$44^\circ 22' 40''$	170		$\Delta = 216$
$9'',3$	201,2		
$B' = 44^\circ 22' 49'',3$			

Calcul de C'.

$A = 29^\circ 25' 17'',5$
$B' = 44^\circ 22' 49'',3$

$A + B' = 73^\circ 48' \ 6'',8$
$C' = 106^\circ 11' 53'',2$

Calcul de c'.

		192	
$\log a = 3,2740254,3$		46,2	$\Delta = 231$
		16,1	
$\log \sin C' = \bar{1},9824082,4$		041	$\Delta = 61$
		36,6	
$\operatorname{colog} \sin A = 0,3087141,5$		4,8	
$\log c' = 3,5651478,2$			
36740,73	392		$\Delta = 118$
	86,2		
$c' = 3674,073$			

Calcul de B''.

$B'' = 180^\circ - B'$

$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$
$B' = 44^\circ 22' 49'',3$

$B'' = 135^\circ 37' 10'',7$

Calcul de C''.

$A = 29^\circ 25' 17'',5$
$B'' = 135^\circ 37' 10'',7$

$A + B'' = 165^\circ \ 2' 28'',2$
$C'' = 14^\circ 57' 31'',8$

Calcul de c''.

$\log a = 3,2740254,3$			
		158	$\Delta = 788$
$\log \sin C'' = \bar{1},4118299,8$		78,8	
		63	
$\operatorname{colog} \sin A = 0,3087141,5$			
$\log c'' = 2,9945695,6$			
98757,37	79		$\Delta = 44$
	16,6		
$c'' = 987,5737$			

QUATRIÈME CAS.

Données. $a = 2543{,}43$, $b = 2332{,}751$, $c = 2597{,}808$
$2p = 7473{,}989$
$p = 3736{,}9945$
$p - a = 1193{,}5645$
$p - b = 1404{,}2435$
$p - c = 1139{,}1865$

Résultats. $S = 2671177$
$A = 61°49'56'',92$
$B = 53°57'15'',58$
$C = 64°12'47'',46$

Vérification. $A + B + C = 179°59'59'',96$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},\quad S = pr.$$

Calcul de log r.

$\log(p-a) = 3{,}0768458{,}7$ 224 $\Delta = 364$
218,4
$\log(p-b) = 3{,}1474424{,}3$ 14,5
$\log(p-c) = 3{,}0565948{,}5$ 1,8
$\operatorname{colog} p = \bar{4}{,}4274775{,}5$

$2 \log r = 5{,}7083607{,}0$
$\log r = 2{,}8541803{,}5$

Calcul de A.

$\log r = 2{,}8541803{,}5$
$\log(p-a) = 3{,}0768458{,}7$

$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}7773344{,}8$
$30°54'50''$ 2941 $\Delta = 477$
$8'',46$ 403,8
$\frac{A}{2} = 30°54'58'',46$
$A = 61°49'56'',92$

Calcul de B.

$\log r = 2{,}8541803{,}5$
$\log(p-b) = 3{,}1474424{,}3$ 290 $\Delta = 309$
123,6
$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}7067379{,}2$ 9,2
1,5
$26°58'30''$ 6973 $\Delta = 521$
$7'',79$ 406,2
$\frac{B}{2} = 26°58'37'',79$
$B = 53°57'15'',58$

Calcul de C.

$\log r = 2{,}8541803{,}5$
$\log(p-c) = 3{,}0565948{,}5$ 619 $\Delta = 381$
304,8
$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}7975855{,}0$ 22,8
1,9
$32°6'20''$ 680 $\Delta = 468$
$3'',73$ 175
$\frac{C}{2} = 32°6'23'',73$
$C = 64°12'47'',46$

Calcul de S.

$\log p = 3{,}5725224{,}5$ 115 $\Delta = 116$
104,4
$\log r = 2{,}8541803{,}5$ 4,6
0,5

$\log S = 6{,}4267028{,}0$
26711,78 6901 $\Delta = 163$
127
$S = 2671177$

§ VI. — PROBLÈMES DIVERS SUR LES TRIANGLES.

229. Nous avons appris à résoudre un triangle quand on connaît trois de ses éléments, dont un côté; nous allons examiner quelques cas simples où, dans les données, un élément est remplacé par une autre grandeur dépendant du triangle, comme le périmètre, la surface, etc.

230. **Problème I.** *Résoudre un triangle, connaissant le périmètre* $2p$, *et deux angles* A *et* B.

Le troisième angle C se calcule par la formule

$$C = 180^\circ - A - B.$$

Quant aux côtés, on peut employer, pour les obtenir, plusieurs procédés.

Première solution. Pour calculer les côtés a, b, c, prenons les trois formules qui donnent les tangentes des moitiés des angles en fonction des côtés :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Il s'agit de résoudre ces trois équations par rapport aux quantités $p-a$, $p-b$ et $p-c$, prises pour inconnues. A cet effet, multiplions membre à membre les deux dernières; nous aurons :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{p-a}{p},$$

d'où :

$$p-a = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

On obtient de même :

$$p-b=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$p-c=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2},$$

et, en prenant les logarithmes :

$$\log(p-a)=\log p+\log\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\log\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$\log(p-b)=\log p+\log\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\log\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$\log(p-c)=\log p+\log\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\log\mathrm{tg}\frac{B}{2}.$$

On calcule $p-a$, $p-b$ et $p-c$ au moyen de ces formules; puis, en retranchant ces quantités de p, on obtiendra pour restes les trois côtés a, b et c.

231. *Seconde solution*. Des relations

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

on déduit :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

formules qui permettent de calculer les côtés a, b, c, en fonction des données. L'expression

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

n'est pas calculable par logarithmes, mais il est facile de la transformer en une autre calculable par logarithmes. On a vu, en effet, que si $A+B+C=180°$, on a (151) :

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

On a donc :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

et on en déduit :

$$a = \frac{p \sin A}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2p \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

ou enfin :

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

On aurait de même :

$$b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad \text{et} \quad c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

On remarque que, pour calculer a, b et c, par ces dernières formules, il faut prendre les logarithmes des sept quantités p, $\sin \frac{A}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$, $\sin \frac{B}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$, $\sin \frac{C}{2}$ et $\cos \frac{C}{2}$, tandis qu'en employant les formules données dans la première solution, on n'emploie que les logarithmes des quatre quantités p, $\text{tg} \frac{A}{2}$, $\text{tg} \frac{B}{2}$, $\text{tg} \frac{C}{2}$. Aussi doit-on préférer la première solution à la seconde.

232. *Discussion*. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la somme $A + B$ soit moindre que 180°, car l'angle C sera alors positif et moindre que 180°; d'ailleurs, comme pour calculer les côtés a, b, c, on se sert, soit du groupe de formules (α), soit du groupe de formules (γ), d'après le théorème IV (193), les longueurs a, b, c, sont les côtés d'un triangle dont les angles sont A, B, C. Le problème n'admet d'ailleurs qu'une solution.

233. **Problème II.** *Résoudre un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé* A, *et la somme l des deux autres côtés.*

Cherchons d'abord les angles B et C du triangle; on a

$$(1) \qquad B + C = 180° - A, \quad \text{d'où} \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

De plus, des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et de la relation

$$b + c = l,$$

on déduit

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{l}{\sin B + \sin C}.$$

D'ailleurs,

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2};$$

donc, l'équation (2) peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{a}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\quad}{\cos \frac{B-C}{2}},$$

d'où :

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{l \sin \frac{A}{2}}{a},$$

et, en prenant les logarithmes :

$$\log \cos \frac{B-C}{2} = \log l + \log \sin \frac{A}{2} - \log a.$$

Au moyen de cette formule, on calculera l'angle $\frac{B-C}{2}$, et comme on connaît l'angle $\frac{B+C}{2}$, on en déduira les angles B et C. Connaissant le côté a et les angles adjacents, on calculera ensuite les côtés b et c, comme au n° 203.

234. *Discussion.* Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que $\frac{l \sin \frac{A}{2}}{a}$, valeur de $\cos \frac{B-C}{2}$, soit moindre que 1; on a donc la première condition :

$$a > l \sin \frac{A}{2}.$$

Cette condition remplie, on pourra calculer l'angle $\frac{B-C}{2}$. On calculera ensuite les angles B et C, au moyen des angles connus $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$. Mais, pour que l'on obtienne ainsi des valeurs positives pour B et pour C, il faut que l'on ait

$$\frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2},$$

ou

$$\frac{B-C}{2} < 90^\circ - \frac{A}{2},$$

ou encore, ces angles étant des angles aigus,

$$\cos \frac{B-C}{2} > \sin \frac{A}{2}.$$

Or, on a

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{l}{a} \sin \frac{A}{2};$$

donc, il faut encore que l'on ait

$$a < l.$$

Le problème n'est donc possible qu'autant que l'on a

$$l \sin \frac{A}{2} < a < l.$$

Cette double condition remplie, on obtient pour B et pour C des valeurs positives, dont la somme est le supplément de A, et par

conséquent le problème est possible et n'admet qu'une solution.

235. *Solution géométrique*. Nous allons rappeler la solution géométrique du même problème, et montrer que les résultats de la discussion de cette solution géométrique sont les mêmes que les résultats de la discussion précédente.

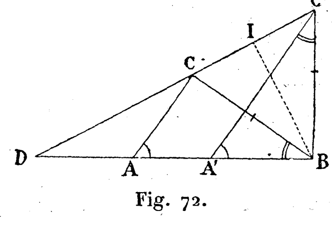


Fig. 72.

Supposons le problème résolu. Soit ABC le triangle demandé (*fig.* 72). On connaît le côté BC $= a$, l'angle A, et la somme l des côtés AB et AC. Sur BA prolongé, prenons AD égal à AC, et considérons le triangle BDC. Dans ce triangle, on connaît le côté BC égal à a, le côté BD égal à l; on connaît aussi l'angle D, car on a

$$\widehat{BAC}=\widehat{ADC}+\widehat{ACD}=2\,\widehat{ADC},$$

d'où

$$D=\frac{A}{2}.$$

On peut donc construire le triangle BDC. On prend à cet effet l'angle BDC égal à la moitié de l'angle donné A, et sur le côté DB, on prend DB égal à l. Puis du point B comme centre avec a pour rayon, on décrit une circonférence. Soient C et C' les points où cette circonférence rencontre le côté DC. Si nous faisons au point C, avec CD, l'angle DCA égal à D, le triangle ABC satisfait aux conditions du problème. De même, si nous faisons au point C' l'angle DC'A' égal à D, le triangle A'BC' satisfait aussi aux conditions du problème.

Mais les deux triangles ABC, A'BC' sont égaux, et, par suite, le problème n'admet qu'une solution. En effet, par construction, BC est égal à BC'; les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BA'C'}$ sont égaux comme angles correspondants par rapport à deux parallèles et à une sécante; enfin, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BC'A'}$ sont égaux, car on a :

$$\widehat{ABC}=\widehat{BCC'}-D$$
$$\widehat{BC'A'}=\widehat{BC'C}-\widehat{A'C'D}.$$

Or, l'angle $\widehat{BCC'}$ est égal à l'angle $\widehat{BC'C}$, parce que BC et BC' sont égaux ; l'angle $\widehat{A'C'D}$ est égal à l'angle D par construction. Donc, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BC'A'}$ sont égaux. On en conclut que les troisièmes angles des triangles sont aussi égaux, et, par suite, que les triangles sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Ainsi, si le problème est possible, il n'admet qu'une solution. Pour qu'il soit possible, il faut que la circonférence décrite du point B comme centre, avec un rayon égal à a, rencontre le côté DC de l'angle BDC, et pour cela il faut que a soit moindre que BD et plus grand que la perpendiculaire BI abaissée du point B sur CD. Or, BD est égal à l, BI est égal à $l \sin \frac{A}{2}$; donc, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$l \sin \frac{A}{2} < a < l.$$

236. **Problème III.** *Résoudre un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé* A, *et la différence l des deux autres côtés.*

Soit b le plus grand des deux côtés inconnus, de sorte que

$$b - c = l;$$

cherchons d'abord les angles B et C du triangle. On a :

$$B + C = 180^\circ - A, \quad \text{d'où} \quad \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

et

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

De ces dernières relations, et de la relation $b - c = l$, on déduit :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{l}{\sin B - \sin C};$$

mais

$$\sin B - \sin C = 2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2};$$

d'ailleurs

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2};$$

on a donc :

$$\frac{a}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{l}{\sin \frac{B-C}{2}},$$

d'où

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{l \cos \frac{A}{2}}{a},$$

et, en prenant les logarithmes :

$$\log \sin \frac{B-C}{2} = \log l + \log \cos \frac{A}{2} - \log a.$$

On calculera, au moyen de cette formule, l'angle $\frac{B-C}{2}$. Cet angle étant donné par un sinus, on obtiendra deux valeurs supplémentaires ; mais l'angle $\frac{B-C}{2}$ étant nécessairement moindre que 90°, on prendra seulement la valeur moindre que 90°. Connaissant $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$, on calculera les angles B et C, puis ensuite les côtés b et c, comme au numéro 203.

237. *Discussion.* Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que l'expression $\frac{l \cos \frac{A}{2}}{a}$, valeur de $\sin \frac{B-C}{2}$, soit moindre que 1. On a donc la première condition

$$(1) \qquad a > l \cos \frac{A}{2}.$$

Cette condition remplie, on pourra calculer l'angle $\frac{B-C}{2}$; on calculera ensuite les angles B et C au moyen des valeurs connues de $\frac{B-C}{2}$ et de $\frac{B+C}{2}$. Mais, pour que l'on obtienne

ainsi des valeurs positives pour B et pour C, il faut que l'on ait

$$\frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2},$$

ou

$$\frac{B-C}{2} < 90^\circ - \frac{A}{2},$$

ou encore, ces angles étant des angles aigus,

$$\sin\frac{B-C}{2} < \cos\frac{A}{2}.$$

Or, on a

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{l}{a}\cos\frac{A}{2};$$

donc il faut encore que l'on ait

(2) $$a > l.$$

D'ailleurs, si la condition (2) est remplie, la condition (1) est remplie à fortiori; donc pour que le problème soit possible, la condition nécessaire et suffisante est la condition (2).

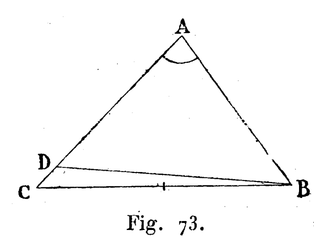


Fig. 73.

238. *Solution géométrique.* Rappelons encore la solution géométrique du même problème. Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle demandé (*fig.* 73). On connaît le côté BC égal à a, l'angle opposé A, la différence l des côtés AC et AB. Sur AC, le plus grand de ces deux côtés, prenons AD égal à AB; la longueur CD sera égale à la différence donnée l. Dans le triangle CDB, on connaît le côté BC égal à a, le côté CD égal à l; on connaît aussi l'angle $\widehat{BDC}$ opposé au côté a, car cet angle est égal à l'angle donné A plus l'angle $\widehat{ABD}$. Or, la somme des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ADB}$, ou deux fois l'angle $\widehat{ABD}$, est le supplément de l'angle A; donc, l'angle $\widehat{ABD}$ est égal à $90^\circ - \frac{A}{2}$; donc enfin l'angle $\widehat{BDC}$ est égal à

$$A + 90^\circ - \frac{A}{2} \quad \text{ou à} \quad 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

On peut donc construire le triangle BDC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ; et, comme l'angle donné, $90^\circ + \frac{A}{2}$, est obtus, on n'obtiendra qu'un seul triangle.

Ce triangle construit, on fera au point B avec BD l'angle $\widehat{DBA}$ égal à l'angle $\widehat{BDA}$, et le triangle ABC satisfera aux conditions du problème.

Pour qu'on puisse construire le triangle BDC, et, par suite, le triangle ABC, il faut et il suffit (215) que BC soit plus grand que CD, c'est-à-dire que l'on ait

$$a > l.$$

239. **Problème IV.** *Résoudre un triangle, connaissant un côté a, l'un des angles adjacents* B, *et la somme l des deux autres côtés.*

Nous remarquons d'abord que connaissant a et la somme $b + c$ qui est égale à l, on connaît par cela même p et $p - a$, car on a

$$2p = a + b + c = a + l$$
$$2(p - a) = b + c - a = l - a;$$

cela posé, des relations

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

on déduit, en les multipliant membre à membre,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{p-a}{p},$$

d'où

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{l-a}{l+a}\cot\frac{B}{2}.$$

On calculera l'angle $\frac{C}{2}$ au moyen de cette formule, puis con-

naissant a, B et C, on achèvera la résolution du triangle, comme au n° 203.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'angle $\frac{C}{2}$ donné par cette formule soit un angle aigu ; en effet, l'angle C doit être moindre que 180° ; de plus, dans ces conditions, la somme $B+C$ sera moindre également que 180°, car $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ étant alors, en vertu de la formule (1), moindre que $\cot\frac{B}{2}$, on a $\frac{C}{2} < 90° - \frac{B}{2}$ ou $B+C < 180°$. La condition nécessaire et suffisante est donc que la valeur de $\frac{C}{2}$ soit positive, ou enfin que l'on ait

$$l > a.$$

240. *Solution géométrique*. Supposons le problème résolu ; soit ABC le triangle demandé (*fig.* 74). On connaît BC égal à a, l'angle B, et la somme l des côtés AB et AC. Prolongeons BA d'une longueur AD égale à AC ; BD est ainsi égal à l, et dans le triangle BCD nous connaissons deux côtés BC et BD, et l'angle compris B.

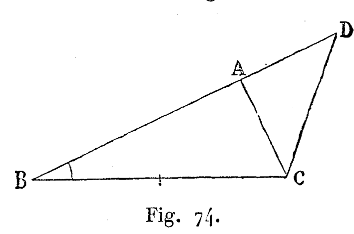


Fig. 74.

Nous construirons ce triangle BCD ; puis, au point C, nous ferons avec CD l'angle ACD égal à l'angle D. Si la droite CA rencontre BD en un point A, entre B et D, le triangle ABC satisfait aux conditions de l'énoncé. — Cette condition exige que BD ou l soit supérieur à a.

241. **Remarque**. La solution géométrique que nous venons de donner conduit très simplement à la formule (1). En effet, pour résoudre le triangle BCD, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, on calcule d'abord, comme au n° 206, la différence des deux autres angles, par la formule

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{BCD}-\widehat{BDC}}{2}=\frac{BD-BC}{BD+BC}\cot\frac{B}{2}.$$

Or,

$$\widehat{BCD} - \widehat{BDC} = \widehat{BCA} = C, \quad BD - BC = l - a;$$

donc on a :

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{l-a}{l+a}\cot\frac{B}{2}.$$

242. **Problème V**. *Résoudre un triangle, connaissant un côté* a, *l'un des angles adjacents* B *et la différence* l *des deux autres côtés.*

En appelant b et c les deux autres côtés, on peut poser, soit

$$b - c = +l,$$

soit

$$b - c = -l.$$

1° Prenons d'abord

$$b - c = +l;$$

on a :

$$2(p-c) = a + b - c = a + l$$
$$2(p-b) = a - b + c = a - l.$$

Or, des formules

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

on déduit, en divisant membre à membre :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{a+l}{a-l},$$

d'où :

$$(1) \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{a-l}{a+l}\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

Pour que cette valeur de $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ soit admissible, il faut qu'elle

soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$a > l.$$

Supposons cette condition remplie; l'angle C étant calculé par la formule (1), on achève la résolution du triangle comme au n° 203. Mais, pour que l'on puisse former un triangle ayant un côté égal à a, et dont les angles adjacents à ce côté soient B et C, il faut et il suffit que l'on ait $B + C < 180°$, ou $\frac{C}{2} < 90° - \frac{B}{2}$; comme les deux angles $\frac{C}{2}$ et $90° - \frac{B}{2}$ sont moindres que 90°, il faut et il suffit que l'on ait

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} < \cot\frac{B}{2}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} < 1,$$

ou enfin, en remplaçant $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ par sa valeur tirée de la formule (1) :

$$\frac{a-l}{a+l}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} < 1, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} < \frac{a+l}{a-l}.$$

Cette condition peut se transformer; on a en effet

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{1-\cos B}{1+\cos B};$$

on doit donc avoir

$$\frac{1-\cos B}{1+\cos B} < \frac{a+l}{a-l},$$

ou, comme les dénominateurs sont positifs,

$$l + a\cos B > 0, \quad \text{ou} \quad l > -a\cos B.$$

D'ailleurs, par hypothèse, on a $a > l$; les conditions nécessaires et suffisantes sont donc

$$(2) \qquad a > l > -a\cos B.$$

Si l'angle B est moindre que 90°, la seule condition de possibilité est $a > l$; si l'angle B est supérieur à 90°, les conditions de possibilité sont les deux conditions (2).

2° Si l'on pose

$$b - c = -l,$$

on aura de même

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{a+l}{a-l}\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

et cette seconde valeur de $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ se déduit de la première par le changement de $+l$ en $-l$.

Pour que cette valeur de $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ soit admissible, il faut qu'elle soit positive, c'est-à-dire que l'on ait encore

$$a > l.$$

Supposons cette condition remplie; l'angle C étant calculé par la formule (3), on achève la résolution du triangle comme au n° 203. Mais, pour que l'on puisse former un triangle ayant un côté égal à a, et dont les angles adjacents à ce côté soient B et C, il faut et il suffit que l'on ait $B + C < 180°$, ou, d'après un calcul analogue au calcul du cas précédent,

$$l < a \cos B.$$

Remarquons que, puisque par hypothèse on a $b - c = -l$, on a $b < c$, donc l'angle B est forcément aigu; cos B est par suite positif; d'ailleurs la condition

$$(4) \qquad l < a \cos B$$

entraîne la condition $l < a$; la condition (4) est donc la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité du problème.

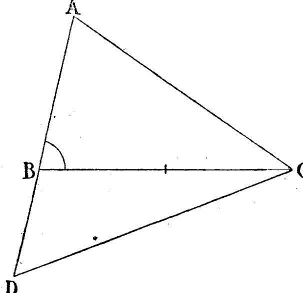


Fig. 75.

243. *Solution géométrique.* 1° Supposons le problème résolu, b étant plus grand que c, et soit ABC un triangle satisfaisant aux conditions données (*fig.* 75). On connaît, dans ce triangle, BC égal à a, l'angle B, et la différence AC — AB égale à l.

Sur AB prenons une longueur AD égale à AC; la longueur BD sera égale à AC — AB, ou à l. Donc, dans le triangle BDC, on connaît les deux côtés, BC égal à a, BD égal à l, et l'angle compris CBD égal à 180° — B. On construit ce triangle; puis au point C on fait, avec CD, un angle DCA égal à l'angle BDC; le triangle ABC ainsi obtenu est le triangle demandé, pourvu toutefois que le côté CA de l'angle construit rencontre DB sur le prolongement de DB, au delà du point B.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que l'angle D du triangle DBC soit un angle aigu, car il doit appartenir au triangle isocèle ACD comme un de ses angles à la base; il faut de plus, pour que le point A soit au delà du point B, sur DB, que l'angle DCA, qui est égal à D, soit supérieur à l'angle BCD; cette condition exige $a > l$. Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes, au point de vue géométrique, pour la possibilité du problème, sont

$$(5) \qquad a > l, \qquad D < 90°.$$

Il est facile de voir que ces conditions (5) sont équivalentes aux conditions de possibilité (2). En effet, dans le triangle DBC on a

$$\frac{a}{\sin D} = \frac{l}{\sin \widehat{DCB}} = \frac{l}{\sin(B - D)} = \frac{l}{\sin B \cos D - \cos B \sin D},$$

d'où

$$\operatorname{tg} D = \frac{a \sin B}{l + a \cos B}.$$

Écrivons que l'on a $D < 90°$, ou $\operatorname{tg} D > 0$; comme a et $\sin B$ sont positifs, la condition est $l + a \cos B > 0$, ou $l > -a \cos B$; les conditions (5) peuvent donc être remplacées par les deux conditions

$$a > l > -a \cos B,$$

ce sont les conditions (2).

2° Soit encore ABC (*fig.* 76) un triangle satisfaisant aux conditions de l'énoncé, mais avec l'hypothèse $b < c$.

Prenons encore sur AB une longueur AD égale à AC, la lon-

gueur BD sera égale à la différence AB — AC, ou à l. Donc dans le triangle BDC on connaît deux côtés, BC égal à a, BD égal à l, et l'angle compris DBC égal à B. On construit ce triangle ; puis au point C on fait, avec CD, un angle égal à l'angle CDA, et le triangle ABC ainsi obtenu est le triangle demandé, pourvu toutefois que le côté CA de l'angle construit rencontre BD sur son prolongement dans le sens BD, au delà du point D.

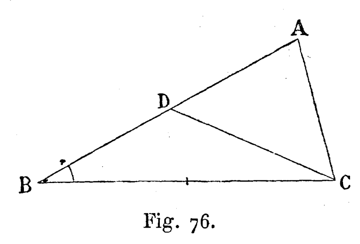


Fig. 76.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'angle ADC, qui doit être angle à la base du triangle isocèle ACD soit un angle aigu, et par suite que l'angle $\widehat{BDC}$ soit un angle obtus ; il faut donc que l'on ait, en appelant D ce dernier angle :

$$D > 90^\circ. \tag{6}$$

Si cette condition est remplie, remarquons que l'on a nécessairement $a > l$, puisque dans le triangle BDC, D est le plus grand angle. La condition (6) est nécessaire et suffisante.

Il est facile de déduire de la condition (6) la condition (4) obtenue en discutant la solution trigonométrique. En effet, dans le triangle BDC on a :

$$\frac{a}{\sin D} = \frac{l}{\sin(B+D)} = \frac{l}{\sin B \cos D + \cos B \sin D},$$

d'où :

$$\operatorname{tg} D = \frac{a \sin B}{l - a \cos B}.$$

La condition (6) exige que l'on ait $\operatorname{tg} D < 0$, et comme a et $\sin B$ sont positifs,

$$l < a \cos B,$$

c'est la condition (4).

244. **Remarque.** Cette solution géométrique conduit encore aisément aux formules (1) et (3).

Dans le cas où

$$b - c = + l,$$

on a (*fig.* 75) à résoudre le triangle BDC, dans lequel on connaît deux côtés, $BC = a$, $BD = l$, et l'angle compris $CBD = 180^\circ - B$; on calcule d'abord la différence des deux autres angles au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{BDC} - \widehat{BCD}}{2} = \frac{BC - BD}{BC + BD} \cot \frac{\widehat{CBD}}{2}.$$

Or,

$$\widehat{BDC} - \widehat{BCD} = \widehat{ACB} = C, \quad BC - BD = a - l, \quad BC + BD = a + l,$$

et

$$\frac{\widehat{CBD}}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2};$$

donc on a

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a - l}{a + l} \operatorname{tg} \frac{B}{2},$$

ce qui est bien la formule (1).

De même, dans le cas où

$$b - c = - l,$$

on a (*fig.* 76) à résoudre le triangle BCD, dans lequel on connaît deux côtés, BC égal à a, BD égal à l, et l'angle compris $\widehat{CBD}$ égal à B. On a, pour calculer la différence des deux autres angles, la formule

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{BDC} - \widehat{DCB}}{2} = \frac{BC - BD}{BC + BD} \cot \frac{\widehat{DBC}}{2};$$

or,

$$\widehat{BDC} - \widehat{DCB} = 180^\circ - \widehat{ACD} - \widehat{DCB} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - C,$$

$$BC - BD = a - l, \quad BC + BD = a + l,$$

et

$$\widehat{DBC} = B.$$

Donc on a

$$\operatorname{tg}\frac{180^\circ - C}{2} = \frac{a-l}{a+l}\cot\frac{B}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{a+l}{a-l}\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

ce qui est bien la formule (2).

245. **Problème VI.** Il est souvent avantageux, dans la résolution d'un triangle, de calculer d'abord non pas les côtés ou les angles, mais certaines lignes ou certains angles auxiliaires dont la grandeur détermine le triangle ; ces éléments connus, on achèvera la résolution ; c'est ce que montre l'exemple suivant.

Résoudre un triangle connaissant un côté a, la médiane m relative à ce côté, et la différence $B - C = \alpha$ *des angles à la base.*

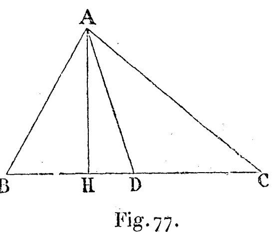


Fig. 77.

Soit ABC le triangle considéré, et soit AD la médiane donnée ; abaissons du sommet A la perpendiculaire AH sur la base et soit H le pied de cette perpendiculaire (*fig.* 77) ; comme on peut toujours supposer que B est le plus grand des deux angles à la base, et par suite que l'angle α est positif, on voit que le point H est toujours à gauche du point D ; si on connaît la longueur DH, le triangle rectangle AHD peut se construire, et le sommet A étant ainsi obtenu, le triangle ABC est connu ; donc, au point de vue géométrique, la connaissance de DH entraîne la connaissance du triangle.

Nous allons nous proposer de calculer DH et d'achever ensuite par le calcul la résolution du triangle. Posons $DH = x$; les triangles rectangles AHB, AHC, AHD donnent, que H soit à droite ou à gauche du point B :

$$AH = \left(\frac{a}{2} - x\right)\operatorname{tg}B = \left(\frac{a}{2} + x\right)\operatorname{tg}C = \sqrt{m^2 - x^2};$$

On en déduit :

$$\operatorname{tg} B = \frac{AH}{\frac{a}{2} - x}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{AH}{\frac{a}{2} + x};$$

on a donc :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(B - C) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = \frac{\frac{AH}{\frac{a}{2} - x} - \frac{AH}{\frac{a}{2} + x}}{1 + \frac{\overline{AH}^2}{\frac{a^2}{4} - x^2}}$$

ou enfin :

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 AH . x}{\frac{a^2}{4} - x^2 + \overline{AH}^2};$$

d'ailleurs

$$(2) \qquad \overline{AH}^2 = m^2 - x^2;$$

en éliminant AH entre ces deux équations, nous aurons l'équation en x cherchée. Pour cela, de l'équation (1), on tire :

$$2 AH . x = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 + \overline{AH}^2\right) \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{a^2}{4} + m^2 - 2x^2\right) \operatorname{tg} \alpha,$$

d'où :

$$(3) \qquad AH = \frac{\left(\frac{a^2}{4} + m^2 - 2x^2\right) \operatorname{tg} \alpha}{2x}.$$

Portant cette valeur dans la relation (2), on a l'équation cherchée

$$\left(\frac{a^2}{4} + m^2 - 2x^2\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 x^2 (m^2 - x^2) = 0,$$

ou, en réduisant et en remplaçant la tangente par sa valeur en fonction du sinus et du cosinus :

$$(4) \quad 4x^4 - 4\left(\frac{a^2}{4} \sin^2 \alpha + m^2\right) x^2 + \left(\frac{a^2}{4} + m^2\right)^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

246. *Discussion.* Pour qu'une valeur de x soit acceptable, il faut et il suffit qu'elle soit réelle, positive et telle que la valeur de AH fournie par l'équation (3) soit positive et moindre que m; remarquons que si la valeur de AH est positive, elle est forcément plus petite que m, en vertu de l'équation (2) qui est vérifiée. Pour la réalité de x, il faut que les racines de l'équation (4) en x^2 soient réelles et positives; or, si les valeurs de x^2 sont réelles, elles sont positives puisque leur produit et leur somme sont positifs; il suffit donc de former la condition de réalité, qui est

$$4\left(\frac{a^2}{4}\sin^2\alpha+m^2\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)^2\sin^2\alpha>0,$$

ou

$$4\cos^2\alpha\left(m^4-\frac{a^4}{16}\sin^2\alpha\right)>0,$$

ou enfin, puisque a^2, m^2 et $\sin\alpha$ sont positifs,

$$(5)\qquad m^2>\frac{a^2}{4}\sin\alpha.$$

Supposons cette condition remplie; les valeurs de x^2, racines de l'équation (4), sont réelles et positives; à chaque valeur de x^2 correspond une valeur positive de x et une seule; il y aura donc autant de solutions qu'il y a de valeurs de x^2 telles que, x étant pris positivement, AH ait également une valeur positive.

Nous devrons distinguer deux cas, suivant que l'angle α donné est aigu ou obtus.

1° Supposons $\alpha<90°$; $\operatorname{tg}\alpha$ a une valeur positive; donc pour que AH ait une valeur positive, il faut et il suffit que l'on ait $x^2<\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$, et on aura autant de solutions qu'il y aura de valeurs en x^2, racines de l'équation (4), satisfaisant à cette inégalité. Posons

$$(6)\qquad f(x^2)=4x^4-4\left(\frac{a^2}{4}\sin^2\alpha+m^2\right)x^2+\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)^2\sin^2\alpha,$$

et substituons dans ce polynôme, premier membre de l'équation (4), à la place de x^2 la valeur $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$; on a :

$$(7) \qquad f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\right)=\left(\frac{a^2}{4}-m^2\right)\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\cos^2\alpha ;$$

le signe du résultat de la substitution dépend de la grandeur de m^2 par rapport à $\frac{a^2}{4}$; or, en vertu de (5), m^2 est plus grand que $\frac{a^2}{4}\sin\alpha$; il peut donc se présenter plusieurs cas :

$$(A) \qquad m^2 > \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4}\sin\alpha ;$$

alors on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\right) < 0 ;$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$ est compris entre les racines, donc une seule valeur de x^2 convient, la plus petite.

$$(B) \qquad \frac{a^2}{4} > m^2 > \frac{a^2}{4}\sin\alpha ;$$

dans ce cas, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\right) > 0 ;$$

donc $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$ est inférieur à la plus petite racine, ou supérieur à la plus grande ; 0 ou 2 solutions ; comparons cette valeur à la demi-somme des racines ; il y a deux solutions si la demi-somme est plus petite que $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + m^2 < \frac{a^2}{4} + m^2$$

condition remplie ; donc deux solutions.

(C) $\quad \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4}\sin\alpha > m^2$; racines imaginaires ; 0 solution.

2° Supposons $\alpha > 90°$; $\operatorname{tg}\alpha$ ayant une valeur négative, il faut, pour que AH ait une valeur positive, que l'on ait $x^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} + m^2\right)$; on est conduit comme précédemment à former $f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\right)$; donc trois cas :

(A) $$m^2 > \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4}\sin\alpha;$$

dans ce cas, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)\right) < 0;$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$ est entre les deux racines; une seule valeur de x^2 convient, la plus grande.

(B) $$\frac{a^2}{4} > m^2 > \frac{a^2}{4}\sin\alpha;$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$ est alors inférieur à la plus petite racine, ou supérieur à la plus grande; d'ailleurs le calcul précédent montre que la demi-somme des racines est inférieure à la valeur $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)$: o solution.

(C) $\frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4}\sin\alpha > m^2$; racines imaginaires; o solution.

3° Supposons $\alpha = 90°$; l'équation (4) devient alors, puisque $\sin\alpha$ est égal à 1 :

$$4x^4 - 4\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{4}+m^2\right)^2 = 0,$$

ou

$$\left(2x^2 - \frac{a^2}{4} - m^2\right)^2 = 0; \quad \text{d'où} \quad x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+m^2\right).$$

Ce fait était évident; car la formule (1) exige, puisque $\alpha = 90°$,

que le dénominateur de la valeur de $\operatorname{tg}\alpha$ soit nul. On calcule alors AH par la formule

$$\overline{AH}^2 = m^2 - x^2,$$

et pour la possibilité du problème, il faut $x^2 < m^2$; en remplaçant x^2 par $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} + m^2\right)$, la condition devient :

$$\frac{a^2}{4} + m^2 < 2m^2,$$

ou

$$m^2 > \frac{a^2}{4}.$$

En résumé :

$$\alpha < 90^\circ \begin{cases} m^2 > \dfrac{a^2}{4} & \text{1 solution.} \\ \dfrac{a^2}{4} > m^2 > \dfrac{a^2}{4}\sin\alpha, & \text{2 solutions.} \\ \dfrac{a^2}{4}\sin\alpha > m^2 & \text{0 solution.} \end{cases} \qquad \alpha \geqslant 90^\circ \begin{cases} m^2 > \dfrac{a^2}{4} & \text{1 solution} \\ \dfrac{a^2}{4} > m^2 & \text{0 solution} \end{cases}$$

247. Ayant obtenu x, pour achever la résolution du triangle, on calculera AH, soit par la formule (3), soit par la relation $AH = \sqrt{m^2 - x^2}$; ayant x et AH, on en déduit les angles B et C par les formules

$$\operatorname{tg} B = \frac{AH}{\frac{a}{2} - x}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{AH}{\frac{a}{2} + x},$$

et les côtés b et c, par les relations

$$b = \frac{\frac{a}{2} + x}{\cos C}, \qquad c = \frac{\frac{a}{2} - x}{\cos B}.$$

§ VII. — QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE.

248. On distingue dans un quadrilatère ABCD (*fig.* 78) huit éléments, les quatre côtés et les quatre angles. Ces huit éléments sont toujours liés entre eux par trois relations distinctes, car il suffit, pour déterminer complètement le quadrilatère, de donner cinq de ces éléments convenablement choisis. Par exemple, on voit immédiatement que l'on peut construire un quadrilatère, connaissant les côtés AB, BC et les angles A, B et C. — Si le quadrilatère est inscriptible, il y a entre les éléments une quatrième relation; cette relation est la suivante : *deux angles opposés sont supplémentaires*. Donc il suffit, pour déterminer un quadrilatère inscriptible, de donner quatre éléments de ce quadrilatère. Toutefois il faut que les éléments donnés soient indépendants les uns des autres, de telle sorte que la grandeur d'aucun d'entre eux ne résulte de la connaissance des autres ; par exemple, deux angles opposés du quadrilatère ne peuvent faire partie du groupe des quatre éléments donnés, car ces angles devant être supplémentaires, un d'eux étant donné, l'autre se trouve déterminé, et on ne donne pas plus en les donnant tous les deux qu'en n'en donnant qu'un. Nous allons donner un exemple de résolution d'un quadrilatère inscriptible.

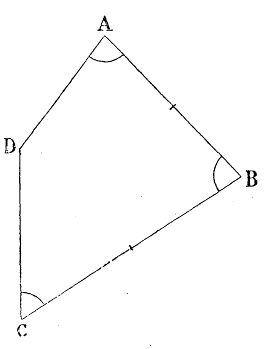


Fig. 78.

249. **Problème.** *Connaissant les quatre côtés d'un quadrilatère convexe inscriptible, calculer les angles, la surface, les diagonales de ce quadrilatère, et le rayon du cercle circonscrit.*

Calcul des angles. Appelons a, b, c, d, les côtés AB, BC, CD, DA, du quadrilatère convexe inscriptible ABCD (*fig.* 79) et A, B, C, D, les angles du quadrilatère, qui ont pour sommets les

points A, B, C et D. Menons la diagonale BD ; nous aurons, dans le triangle ABD :

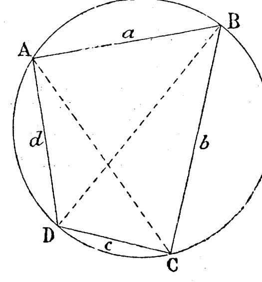


Fig. 79.

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos \mathrm{A},$$

et dans le triangle BDC :

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{C};$$

d'ailleurs, les angles A et C étant supplémentaires, cos C est égal à — cos A, et par conséquent, en égalant ces deux expressions de $\overline{\mathrm{BD}}^2$, on a la relation

$$a^2 + a^2 - 2ad\cos \mathrm{A} = b^2 + c^2 + 2bc\cos \mathrm{A},$$

ou

$$\cos \mathrm{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Cette formule fait connaître l'angle A en fonction des quatre côtés ; mais, comme elle n'est pas calculable par logarithmes, on la transforme en opérant comme on a fait au n° 219 pour calculer un angle d'un triangle en fonction des trois côtés.

On a, l'angle $\frac{\mathrm{A}}{2}$ étant moindre que 90° :

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \mathrm{A}}{2}}, \quad \text{et} \quad \cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \mathrm{A}}{2}}.$$

Formons les expressions $1 - \cos \mathrm{A}$ et $1 + \cos \mathrm{A}$. On a :

$$1 - \cos \mathrm{A} = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad + bc)}$$
$$= \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$
$$= \frac{(b + c + a - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)},$$

et

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b + c + d - a)(a + b + c - d)}{ad + bc}}.$$

De même,

$$1+\cos A=\frac{2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$
$$=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)}$$
$$=\frac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{2(ad+bc)},$$

et

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{ad+bc}}.$$

Si nous désignons par $2p$ le périmètre du quadrilatère, nous aurons :

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=2p \\ b+c+d-a&=2(p-a) \\ a+c+d-b&=2(p-b) \\ a+b+d-c&=2(p-c) \\ a+b+c-d&=2(p-d), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}},$$

et

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

Les angles C et D sont les suppléments des angles A et B.

250. *Discussion.* Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les valeurs trouvées pour les tangentes des angles $\frac{A}{2}$ et $\frac{B}{2}$ soient réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)} > 0, \quad \text{et} \quad \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)} > 0,$$

ou enfin que le produit

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

soit positif. Il faut pour cela, ou que les quatre quantités

$$p-a, \quad p-b, \quad p-c, \quad p-d,$$

soient positives, ou que deux de ces quantités soient négatives et les autres positives, ou que les quatre soient négatives. Or, deux de ces quantités ne peuvent être négatives en même temps, car si l'on a, par exemple,

$$p-a < 0, \quad \text{et} \quad p-b < 0,$$

on en déduit en ajoutant

$$2p-a-b < 0,$$

ou, en remplaçant $2p$ par sa valeur $a+b+c+d$,

$$c+d < 0,$$

ce qui est impossible, les quantités données étant nécessairement positives. Donc la condition de possibilité est que les quatre quantités

$$p-a, \quad p-b, \quad p-c, \quad p-d,$$

soient positives, ou, ce qui revient au même, que chaque côté du quadrilatère soit moindre que la somme des trois autres.

251. *Calcul de la surface.* La surface S du quadrilatère est la somme des surfaces des triangles ABD et BCD. Or, la surface du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}ad \sin A$, la surface du triangle BCD est égale à $\frac{1}{2}bc \sin C$, ou, l'angle C étant le supplément

de A, à $\frac{1}{2} bc \sin A$. Donc on a

$$S = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A.$$

D'autre part,

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

et, en remplaçant $\sin \frac{A}{2}$ par $\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}$, et $\cos \frac{A}{2}$ par $\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}$,

$$\sin A = \frac{2}{ad+bc} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

donc enfin,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

252. *Calcul des diagonales.* En éliminant l'angle A entre les deux relations

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$
$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A,$$

on a

$$\overline{BD}^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{bc + ad},$$

ou

$$\overline{BD}^2 = \frac{ab(ac + bd) + cd(ac + bd)}{bc + ad},$$

ou enfin

$$\overline{BD}^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}.$$

On aurait de même

$$\overline{AC}^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

Ces formules permettent de calculer les deux diagonales BD et AC en fonction des côtés.

253. **Remarque.** La comparaison des deux dernières formules permet encore d'établir des théorèmes remarquables, relativement aux diagonales d'un quadrilatère inscriptible. En multipliant ces relations membre à membre, on a

$$\overline{BD}^2 \times \overline{AC}^2 = (ac + bd)^2,$$

d'où

$$BD \times AC = ac + bd.$$

Ce qui montre que, *dans un quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

En divisant membre à membre les mêmes relations, on a

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{(ad + bc)^2}{(ab + cd)^2},$$

ou

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Ce qui montre que, *dans un quadrilatère inscriptible* ABCD, *le rapport de la diagonale* AC *à la diagonale* BD *est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent en* A *et des côtés qui aboutissent en* C, *à la somme des produits des côtés qui aboutissent en* B *et des côtés qui aboutissent en* D.

254. *Calcul du rayon du cercle circonscrit.* Si nous désignons par R le rayon du cercle circonscrit, on a, dans le triangle ABD,

$$R = \frac{BD}{2 \sin A}.$$

Or on a

$$BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}},$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc};$$



donc

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

§ VIII. — APPLICATION DE LA TRIGONOMÉTRIE AUX QUESTIONS QUE PRÉSENTE LE LEVÉ DES PLANS.

255. **Problème I.** *Trouver la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.*

Soit AB la hauteur qu'il faut déterminer, et supposons que le pied A soit placé sur un terrain horizontal, de telle sorte que l'on puisse mesurer avec la chaîne d'arpenteur une base AC située dans ce terrain horizontal et passant par le pied A de la hauteur à mesurer (*fig.* 80). On place le graphomètre au point C, et on dispose le cercle gradué dans le plan vertical contenant le point A ; soit C′ le centre du cercle gradué, on met le diamètre 0° — 180° horizontal, et avec l'alidade mobile on vise le sommet B ; on connaît ainsi l'angle A′C′B.

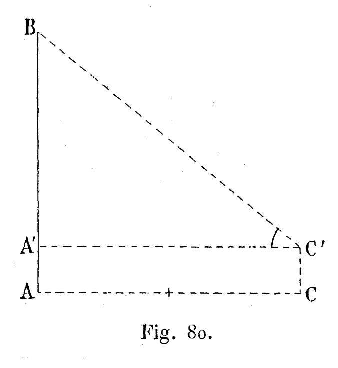


Fig. 80.

Ceci posé, dans le triangle rectangle A′C′B on connaît un côté de l'angle droit A′C′ et l'angle en C′ ; on en déduit :

$$A'B = A'C' \operatorname{tg} C',$$

formule calculable par logarithmes. En ajoutant à la longueur ainsi calculée, la hauteur CC′ du graphomètre, on aura la hauteur AB cherchée.

256. **Problème II.** *Trouver la hauteur d'une tour dont le pied est inaccessible, ou la hauteur d'une montagne au-dessus de la plaine.*

Dans ce problème comme dans le précédent, nous nous proposons de calculer la hauteur de la tour ou de la montagne au-

dessus du plan horizontal passant par le centre du cercle gradué du graphomètre.

Soit AH la hauteur à mesurer, A étant le sommet et H le pied, sur ce plan horizontal, de la verticale menée par le sommet A (*fig.* 81). On trace dans la plaine une droite BC telle que de ses deux extrémités on aperçoive le sommet A, et on mesure cette base BC. Ceci fait, on place le graphomètre au point C et on mesure l'angle $\widehat{ACB}$; on transporte ensuite le graphomètre au point B et on mesure d'une part l'angle $\widehat{ABC}$, d'autre part l'angle $\widehat{ABH}$; pour évaluer ce dernier angle, on place le cercle gradué dans le plan vertical contenant le sommet A, on dispose horizontalement la ligne 0° — 180° et avec l'alidade mobile on vise le point A; l'angle de l'alidade mobile avec l'alidade fixe est l'angle ABH. Ceci posé, il est facile de calculer AH; dans le triangle ABC, on a

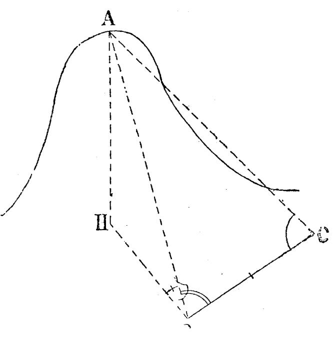


Fig. 81.

$$\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC}),$$

$$AB = \frac{BC \sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{BAC}};$$

le triangle ABH donne alors

$$AH = AB \sin \widehat{ABH},$$

ou, en remplaçant AB par sa valeur

$$AH = \frac{BC \sin \widehat{ACB} \sin \widehat{ABH}}{\sin \widehat{BAC}},$$

formule calculable par logarithmes. — Il est bien entendu que, pour avoir la hauteur de la tour ou de la montagne au-dessus

de la plaine, il faut, à la longueur AH ainsi calculée, ajouter la hauteur du graphomètre.

257. **Problème III.** *Trouver la distance d'un point accessible* A *à un point inaccessible* B.

On trace sur le terrain à partir du point A une ligne AC que l'on mesure avec la chaîne (*fig.* 82); avec le graphomètre on mesure successivement les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BCA}$; dans le triangle ABC, on connaît un côté et les deux angles adjacents; on a donc

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (A + C),$$

et

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B},$$

formule calculable par logarithmes.

258. **Problème IV.** *Déterminer la distance de deux points inaccessibles* A *et* B.

On trace sur le terrain une base CD (*fig.* 83) que l'on choisit

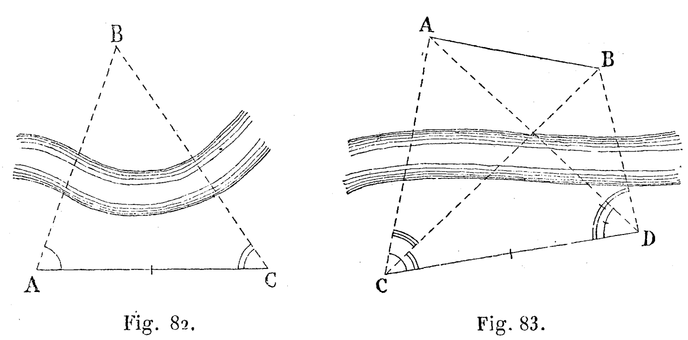


Fig. 82. Fig. 83.

de manière que de ses deux extrémités on aperçoive les points A et B. On mesure la longueur de cette base CD, et, avec un graphomètre, on mesure les angles $\widehat{ACD}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ACB}$, puis les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BDC}$. Dans le triangle ACD, on connaît un côté CD et les deux angles adjacents; on aura donc

$$(1) \qquad AC = \frac{CD \sin \widehat{ADC}}{\sin(\widehat{ADC} + \widehat{ACD})};$$

de même, dans le triangle BCD, on connaît un côté CD et les deux angles adjacents ; on aura donc

$$(2) \qquad BC = \frac{CD \sin \widehat{BDC}}{\sin(\widehat{BDC} + \widehat{BCD})}.$$

Enfin, connaissant les côtés AC, BC du triangle ACB et l'angle $\widehat{ACB}$ qu'ils comprennent, on peut calculer AB. On remarque qu'il est inutile de calculer les valeurs de AC et de BC; il suffit de calculer leurs logarithmes, log AC et log BC; on est ramené à calculer le troisième côté d'un triangle ACB connaissant les logarithmes des deux autres côtés et l'angle qu'ils comprennent (213); on achèvera le calcul comme il a été indiqué au n° 213.

259. Si les deux droites AB et CD sont dans un même plan, l'angle ACB est égal à la différence des angles ACD et BCD ; mais quand ces deux droites ne sont pas dans un même plan, les angles ACB, ACD et BCD sont les trois faces d'un angle trièdre, et par suite, dans ce cas, l'angle ACB est plus grand que la différence des deux autres.

260. **Problème V.** *Trois points* A, B, C *étant situés sur un terrain uni et rapportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point* P, *d'où les distances* AC *et* BC *ont été vues sous des angles donnés* α *et* β (*fig.* 84).

On a une solution géométrique du problème en décrivant sur AC un arc de cercle capable de l'angle α, et sur BC un arc de cercle capable de l'angle β. Ces deux arcs se coupent au point C, et en un autre point P qui est le point cherché. — Si la somme des angles α et β est le supplément de l'angle ACB, les deux arcs de cercle se confondent, et le problème est indéterminé.

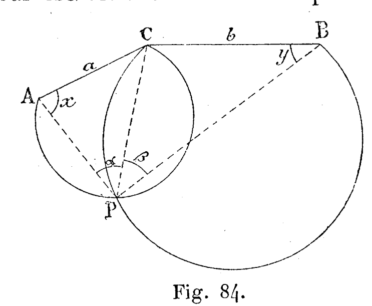


Fig. 84.

Mais ce procédé ne comporte pas une très grande exactitude, car les constructions d'angles sur le papier ne peuvent pas être faites avec une précision comparable à celle avec laquelle sont

mesurés les angles sur le terrain. Il n'en est pas de même pour les longueurs ; grâce aux échelles de réduction, on peut porter sur le papier des longueurs proportionnelles aux longueurs mesurées sur le terrain, avec une précision comparable à celle avec laquelle ces longueurs ont été mesurées ; c'est pourquoi dans les constructions graphiques on doit remplacer l'emploi des angles par l'emploi des longueurs. On arrivera donc à une meilleure détermination du point P si l'on calcule d'abord les angles CAP et CBP, puis les longueurs AP, BP et CP, et si, des points A, B et C pour centres, avec des rayons égaux aux longueurs trouvées, on décrit trois cercles qui doivent se couper au point cherché.

Soient $CA = a$, $CB = b$ et soit C l'angle connu ACB ; appelons x l'angle CAP, y l'angle CBP.

Le quadrilatère ACBP étant supposé plan, on a d'abord :

$$\alpha + \beta + C + x + y = 360^\circ,$$

d'où

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + C).$$

On obtient une seconde relation entre x, y et les données, en calculant le côté CP dans les deux triangles ACP, BCP, et en écrivant que les deux expressions trouvées sont égales.

On a ainsi :

$$CP = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

On tire de là :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta},$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2},$$

et, comme on connaît $x+y$, cette formule permet de calculer $\frac{x-y}{2}$, et, par suite, x et y. Mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes ; pour la rendre calculable par logarithmes, mettons le rapport $\frac{b\sin\alpha - a\sin\beta}{b\sin\alpha + a\sin\beta}$ sous la forme $\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}$; et déterminons un angle auxiliaire φ, compris entre 0 et 90°, tel que l'on ait :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}.$$

Le rapport $\frac{b\sin\alpha - a\sin\beta}{b\sin\alpha + a\sin\beta}$ est égal à $\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}$, ou à $\frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\varphi}$, ou enfin à $\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)$. Donc on a :

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}.$$

Connaissant $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{x-y}{2}$, on obtient aisément x et y, et ensuite il est très facile de calculer les longueurs AP, BP et CP.

261. **Remarque.** Si la somme des angles α et β est le supplément de l'angle C, nous avons reconnu géométriquement que le problème est indéterminé. Dans ce cas, le calcul conduit nécessairement à une indétermination. En effet, $x+y$ est alors égal à 180°, et par suite,

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{tg}90^\circ$$

est infinie. D'autre part, le rapport

$$\frac{b\sin\alpha - a\sin\beta}{b\sin\alpha + a\sin\beta}$$

est alors nul; en effet, le quadrilatère ACBP est inscriptible

(*fig.* 85), et l'angle α est égal à l'angle ABC, l'angle β est égal à l'angle BAC, et par suite, dans le triangle ABC, on a :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},$$

ou

$$a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

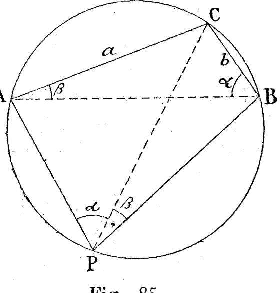


Fig. 85.

Dans ce cas, $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$ étant égal au produit de deux facteurs dont l'un est nul, l'autre infini, est une quantité indéterminée, et x et y ne sont assujettis qu'à la condition $x+y=180^\circ$.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI.

1. Soit r le rayon du cercle inscrit dans un triangle ABC; soient r', r'', r''' les rayons des cercles exinscrits situés respectivement dans l'angle A, dans l'angle B, dans l'angle C; soient $2p$ le périmètre du triangle, S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit; démontrer les relations

$$S=(p-a)r'=(p-b)r''=(p-c)r''',$$

$$r'=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\qquad r''=p\operatorname{tg}\frac{B}{2},\qquad r'''=p\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''},\qquad S=\sqrt{rr'r''r'''},\qquad R=\frac{abc}{4S},$$

$$R=\frac{r'+r''+r'''-r}{4},\qquad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

2. Dans une suite de triangles, on donne a et $b+c$; démontrer que : 1° la projection de la bissectrice de l'angle A sur l'un des côtés de cet angle; 2° le produit des perpendiculaires abaissées des sommets B et C sur la seconde bissectrice de l'angle A; 3° le produit des tangentes des demi-angles B et C; 4° le quotient $\frac{r}{r'}$; 5° le produit $r''r'''$; sont des quantités constantes.

3. Si on mène un cercle tangent à la fois au cercle inscrit dans un triangle ABC et aux deux côtés AB, AC de ce triangle, r_a étant le rayon de ce cercle, r étant le rayon du cercle inscrit, on a la relation

$$r_a = r\,\mathrm{tg}^2\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right).$$

4. Soient O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, H le point de rencontre des hauteurs, I le centre du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit : 1° Démontrer les relations

$$\overline{OI}^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$
$$\overline{IH}^2 = 4R^2\left(8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cos A\cos B\cos C\right);$$

2° r étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC, et R′ le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes en A, B et C, démontrer les relations

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$
$$\overline{OH}^2 = R^2 - \frac{2R^3}{R'}$$
$$\overline{IH}^2 = 2r^2 - \frac{R^3}{R'}.$$

5. Soient A, B, C, les angles d'un triangle ABC ; calculer, en fonction de ces angles, le rapport de la surface du triangle ABC à la surface du triangle A′B′C′, qui a pour sommets les pieds A′, B′, C′, des hauteurs du triangle ABC.

6. O étant le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, démontrer la relation

$$AB.\overline{OC}^2 + BC.\overline{OA}^2 + AC.\overline{OB}^2 = AB.BC.AC.$$

(Concours académique, Clermont, 1875.)

7. Si A′, B′, C′, sont les angles sous lesquels on voit, du centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, les côtés de ce triangle, démontrer que l'on a la relation

$$4\sin A'\sin B'\sin C' = \sin A + \sin B + \sin C.$$

(Saint-Cyr, Examen oral.)

8. Démontrer que, si on divise la base BC d'un triangle ABC en



trois parties égales par les points Q et R, on a les relations

$$\sin \mathrm{BAR}.\sin \mathrm{CAQ} = 4 \sin \mathrm{BAQ}.\sin \mathrm{CAR}$$

$$(\cot \mathrm{BAQ} + \cot \mathrm{QAR})(\cot \mathrm{CAR} + \cot \mathrm{RAQ}) = 4\,\mathrm{cos\acute{e}c}^2\,\mathrm{QAR}.$$

9. a, b, c, étant les côtés et A, B, C, étant les angles d'un triangle, démontrer que les angles aigus x, y, z, déterminés par les équations

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \qquad \cos y = \frac{b}{c+a}, \qquad \cos z = \frac{c}{a+b},$$

vérifient les relations

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{y}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{z}{2} = 1$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}\,\mathrm{tg}\frac{z}{2} = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

(Baccalauréat, Paris.)

10. A, B, C, étant les angles d'un triangle, trouver la valeur de l'expression

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1.$$

11. Démontrer que, A, B, C, étant les angles d'un triangle, on a la relation

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

12. A, B, C, étant les angles d'un triangle, chercher quel doit être ce triangle pour que l'expression

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$$

prenne sa valeur minimum.

13. Démontrer que tout triangle dans lequel on a

$$\frac{\mathrm{tg}\,B}{\mathrm{tg}\,C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$$

est isocèle ou rectangle.

14. Démontrer que si, dans un triangle, on a la relation

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

le triangle est rectangle en A.

15. Démontrer qu'un triangle est rectangle si l'on a entre les angles l'une ou l'autre des relations

$$\sin C - \cos A = \cos B, \qquad \frac{\sin B}{\cos C} = \sin A + \cos A \cot B.$$

16. Démontrer que si, dans un triangle, on a la relation

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C,$$

le triangle est isocèle.

17. Résoudre un triangle rectangle, connaissant la hauteur h, et le rayon r' du cercle exinscrit dans l'un des angles aigus.

(Concours académique, Poitiers, 1874.)

18. Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la longueur de la bissectrice de l'angle droit.

19. Résoudre un triangle rectangle, connaissant le rayon du cercle inscrit et la bissectrice de l'angle droit.

20. Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et le produit l^2 des bissectrices des angles aigus; discuter.

21. Résoudre un triangle, connaissant les angles et une hauteur.

22. Résoudre un triangle, connaissant un côté a, la hauteur correspondante h, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

23. Résoudre un triangle, connaissant un angle, la hauteur issue du sommet de cet angle et la somme, ou la différence, ou le produit, ou le quotient, des deux côtés adjacents.

24. Résoudre un triangle, connaissant le côté a, l'angle opposé A et la hauteur h correspondant au côté a.

25. Résoudre un triangle, connaissant un angle et deux hauteurs.

26. Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs.

27. Résoudre un triangle, connaissant les angles et la somme des inverses des hauteurs.

(Concours académique, Lyon, 1878.)

28. Calculer les angles B et C d'un triangle ABC, connaissant l'angle A et les deux segments m et n déterminés sur le côté BC par la hauteur issue du sommet A.

(Baccalauréat, Paris.)



29. Résoudre un triangle, connaissant les angles et le rayon du cercle circonscrit.

30. Résoudre un triangle, connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit ou d'un cercle exinscrit.

31. Résoudre un triangle, connaissant un angle, le rayon du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.

(Concours académique, Grenoble, 1878.)

32. Résoudre un triangle, connaissant les rayons des trois cercles exinscrits.

33. Résoudre un triangle, connaissant les angles et les distances d'un point du plan aux trois côtés.

34. Résoudre un triangle, connaissant le rayon du cercle inscrit, un angle et la somme des distances du centre du cercle inscrit aux sommets des deux autres angles.

35. Résoudre un triangle, connaissant un angle, la surface et la somme des carrés des trois côtés.

36. Résoudre un triangle, connaissant un côté, la différence des angles adjacents et le produit ou le quotient des deux autres côtés.

37. Résoudre un triangle, connaissant a, A, et le produit m^2 de l'un des deux côtés inconnus par la somme ou par la différence de ces deux côtés.

38. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté a, l'angle opposé A et la somme des carrés des deux autres côtés, $b^2+c^2=m^2$.

39. Résoudre un triangle ABC, connaissant l'angle A et les deux sommes $a+b$, $a+c$; discuter.

(Concours général, 1862.)

40. Résoudre un triangle, connaissant le périmètre, un angle et la surface.

41. On donne dans un triangle l'angle C, la surface S, et l'on sait que $a+b-c=k$, k étant une quantité donnée : calculer a, b, c, A et B.

(Baccalauréat, Montpellier.)

42. Résoudre un triangle ABC, connaissant la surface S, le côté c, et la différence des angles adjacents $A-B=\alpha$; discuter.

(Concours général, 1860.)



43. Résoudre un triangle ABC, connaissant l'angle A, la longueur m de la médiane issue du sommet A, et la surface S.

(Baccalauréat, Rennes.)

44. Résoudre un triangle, connaissant la base, la hauteur et le produit des tangentes des demi-angles à la base.

(Concours académique, Caen, 1874.)

45. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté a, l'angle A, et sachant que $b - c + h = l$, l étant une quantité donnée, et h représentant la hauteur issue du sommet A.

(Fermat.)

46. Résoudre un triangle ABC, connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la somme m^2 des carrés de la hauteur h qui correspond au côté a, et de la différence des deux autres côtés, $h^2 + (b - c)^2 = m^2$.

(Agrégation, 1875.)

47. Résoudre un triangle, connaissant l'angle A, la hauteur h et la médiane m qui lui correspondent.

(Concours général, 1855.)

48. Dans un triangle ABC, on donne l'angle A et les longueurs β et γ des médianes qui aboutissent respectivement aux sommets B et C; calculer les côtés AC, AB, et construire géométriquement le triangle.

(Concours académique, Dijon, 1877.)

49. Résoudre un triangle, connaissant l'angle A, ainsi que la bissectrice et la médiane issues de ce sommet.

50. On donne le côté a d'un triangle ABC, la somme l des deux autres côtés, la somme k^2 des carrés des bissectrices, soit des angles intérieurs adjacents au côté a, soit des angles extérieurs adjacents au même côté, et on demande de calculer les deux autres côtés b et c; on examinera le cas particulier où $l = 4a$, et, dans ce cas, on discutera complètement les deux problèmes en laissant a fixe et en faisant varier k^2.

(Agrégation, 1880.)

51. Soit un triangle ABC; soient B' et C' les points de rencontre des côtés AC et AB avec les bissectrices des angles B et C du triangle; soient de même B″ et C″ les points de rencontre des mêmes côtés avec les bissectrices des angles extérieurs au triangle et qui ont B et C pour sommets : 1° calculer les angles B et C, connaissant le



côté a, l'angle opposé A, et le produit ma^2 des longueurs BB', CC' des bissectrices intérieures; 2° résoudre la même question en supposant que ma^2 est le produit des longueurs BB'', CC'' des bissectrices extérieures; discuter les deux problèmes, et pour le second, indiquer, dans les différents cas qui peuvent se présenter, les positions des points B'' et C'' par rapport au côté BC.

(Agrégation, 1885.)

52. Résoudre un triangle ABC, connaissant le côté a, l'angle B, la différence $b - h = l$ entre le côté b et la hauteur h issue du sommet A; discuter. — Montrer que le problème peut être ramené à la recherche des points où le côté BA rencontre une parabole ayant pour foyer le sommet C du triangle et pour directrice une parallèle au côté BC; discuter à nouveau le problème, et comparer les résultats des deux discussions.

(Agrégation, 1881.)

53. Résoudre un triangle ABC, connaissant la somme $a + b = l$, la hauteur h correspondant au côté a, et la médiane m correspondant au côté b.

54. On donne la longueur de la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC et la somme des deux côtés AB, AC qui comprennent cet angle; étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle A et des côtés AB et AC.

(Agrégation, 1871.)

55. Résoudre un triangle, connaissant un angle et les segments extrêmes déterminés sur le côté opposé par les droites qui partagent l'angle en trois parties égales.

(Concours académique, Bordeaux, 1872.)

56. Dans un triangle ABC où le rayon du cercle circonscrit est égal à l'unité, on mène les bissectrices des suppléments des angles; on forme ainsi un nouveau triangle A'B'C', le sommet A' étant dans l'angle A, le sommet B' dans l'angle B, le sommet C' dans l'angle C; on donne : 1° le rapport λ du côté AB à la somme des deux autres côtés BC et AC; 2° le rapport μ du côté A'B' à la somme des côtés B'C' et A'C'; on demande de résoudre le triangle ABC et de trouver les conditions de possibilité du problème.

(Concours général, 1863.)



57. Trouver dans le plan d'un triangle un point tel qu'en le joignant aux trois sommets du triangle, les trois triangles ainsi formés aient des cercles circonscrits égaux.

(Concours académique, Caen, 1875.)

58. Calculer les angles et la surface d'un trapèze, connaissant les quatre côtés.

59. Calculer les angles et la surface d'un trapèze, connaissant les bases parallèles et les deux diagonales.

60. Résoudre un trapèze, connaissant les angles et les longueurs des diagonales.

61. Calculer les côtés et les angles d'un trapèze isocèle, connaissant le périmètre $2p$, la longueur a des diagonales et l'angle 2α de ces droites; discuter géométriquement et trigonométriquement.

(Baccalauréat, Toulouse.)

62. Calculer les éléments d'un trapèze inscrit dans un cercle de rayon donné R, connaissant un angle et la surface.

63. Calculer les côtés d'un trapèze inscrit dans un cercle de rayon donné R, connaissant le périmètre $4p$, et un angle aigu α.

64. A partir du point A sur une circonférence de rayon 1, on porte un arc $AB = x$, puis à la suite un arc $BC = a$, tel que l'on ait $x + a < \pi$; on joint le point C à l'extrémité D du diamètre qui passe en A; étudier les variations de la surface et du périmètre du quadrilatère ABCD.

65. Étant donné un triangle isocèle dont l'angle au sommet est égal à A et dont la base est égale à a, on prend sur la base BC un point M et on abaisse du point M les perpendiculaires MP, MQ sur les deux autres côtés; on demande : 1° d'exprimer la surface du quadrilatère APMQ; 2° de déterminer la position du point M de telle sorte que la surface soit maxima ou minima.

(Baccalauréat, Besançon.)

66. Résoudre un quadrilatère, connaissant les côtés et la surface.

67. Résoudre un quadrilatère, connaissant les angles et les longueurs des diagonales.

68. Résoudre un quadrilatère, connaissant trois côtés et les deux angles adjacents au quatrième côté.

(Concours académique, Bordeaux, 1879.)



69. Résoudre un quadrilatère inscriptible, connaissant les diagonales et deux côtés opposés.

70. On donne une circonférence dont le centre est en O et un point P dans son intérieur; par le point P on mène deux cordes rectangulaires quelconques APC, BPD; on forme le quadrilatère inscrit ABCD en joignant les extrémités de ces cordes; on mène ensuite les tangentes au cercle aux points A, B, C, D; les points de rencontre des tangentes consécutives sont les sommets d'un second quadrilatère A'B'C'D'; 1° démontrer que ce second quadrilatère est inscrit dans un cercle dont le centre est sur la droite OP; 2° exprimer, au moyen du rayon du cercle O, de la distance OP et de l'angle de l'une des cordes avec OP (l'angle APO par exemple), les segments des cordes, les côtés du quadrilatère inscrit, les segments des côtés du quadrilatère circonscrit et les sinus des angles de ce quadrilatère; 3° démontrer, à l'aide des relations obtenues, que le produit des côtés du quadrilatère inscrit, les distances des centres des deux cercles et le rayon du second cercle demeurent invariables, lorsqu'on fait tourner les cordes autour du point P.

(Concours général, 1870.)

71. Résoudre un quadrilatère dans lequel deux angles opposés sont droits, connaissant un des autres angles et les côtés qui le comprennent.

72. Résoudre un quadrilatère ABCD à la fois inscriptible et circonscriptible, connaissant :

1° Les angles et le périmètre $2p$;

2° L'angle A, le périmètre $2p$, et le rayon r du cercle inscrit;

3° Le périmètre $2p$, le rayon r du cercle inscrit, et le produit l^2 des diagonales.

73. Trouver les angles d'un quadrilatère convexe circonscrit à un cercle de rayon donné r, connaissant trois côtés consécutifs a, b, c, de ce quadrilatère; chercher entre quelles limites doit varier r pour que le problème soit possible, les côtés donnés a, b, c, restant constants; on distinguera deux cas : celui où les points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence sont situés sur les côtés eux-mêmes, et celui où ces points de contact sont sur les prolongements des côtés.

(Agrégation, 1884.)

74. Étant donnés deux points fixes A et B, par le milieu O de la droite AB, on trace une droite OP faisant avec AB un angle φ quel-

conque et une droite OP′ perpendiculaire sur OP; on prend respectivement sur OP et sur OP′ deux points M et M′ tels que chacune des sommes $MA + MB$, $M'A + M'B$ soit égale à une quantité donnée $2a$; puis on achève le rectangle OMNM′ dont OM et OM′ sont deux côtés : trouver à quelles valeurs de l'angle φ correspondent le maximum et le minimum de l'aire du rectangle.

(Concours général, 1861.)

75. Une tour DE est bâtie au pied d'un coteau; sur le penchant du coteau on mesure une base $AB = a$, dont le prolongement vient passer au pied de la tour; les hauteurs angulaires du sommet de la tour au-dessus de l'horizon, mesurées des points A et B, sont α et β; la dépression HCD du pied de la tour au-dessous de l'horizon, mesurée d'un point quelconque C de la base, est γ: calculer la hauteur de la tour.

(Concours académique, Bordeaux, 1873.)

76. Un ballon a été observé en même temps de trois stations situées dans un plan horizontal et qui sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs données; on a mesuré les angles formés avec le plan horizontal par les rayons visuels dirigés vers le ballon; on demande la hauteur du ballon au-dessus du plan des stations; examiner les cas particuliers où : 1° les stations sont les sommets d'un triangle équilatéral; 2° les stations sont en ligne droite.

(Concours général, 1872.)

PROBLÈMES DIVERS.

77. On donne deux circonférences tangentes extérieurement et de rayons a et b; soit θ l'angle de leurs tangentes communes extérieures; démontrer la relation

$$\sin\theta = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

78. Étant donné un triangle ABC, on demande de mener par le sommet C une droite CD telle que la somme des projections sur cette droite des côtés AC et BC soit égale à une longueur donnée; discuter.

(Concours général, Phil., 1864.)

79. Étant donné un triangle ABC, on considère la bissectrice de l'angle A, et on demande de déterminer sur cette bissectrice un point M tel que, si on le joint aux deux sommets B et C, on ait $\frac{MB}{MC}=k$; discuter; variations de k.

80. Étant donné un triangle ABC, on le fait tourner autour d'un de ses côtés AB de façon qu'il effectue une révolution complète : 1° évaluer en fonction de AB et des angles adjacents A et B la somme des surfaces engendrées par les côtés AC et BC, ainsi que le volume engendré par le triangle ABC; 2° en supposant données la base AB et la somme des angles A et B, chercher pour quelles valeurs de ces angles le volume précédent sera maximum.

(Baccalauréat, Toulouse.)

81. Dans un triangle quelconque ABC, on désigne par a, b, c, les trois côtés et par I un point qui détermine sur le côté BC deux segments IB, IC proportionnels aux nombres p et q; ceci posé, on demande : 1° de calculer en fonction de a, b, c, p, q, la longueur x de la droite AI; 2° de déduire de la formule obtenue et en fonction de a, b, c, les longueurs α, β, γ, des bissectrices intérieures des angles A, B, C, et les longueurs α', β', γ', des bissectrices extérieures de ces mêmes angles; 3° de démontrer que, si les bissectrices β et γ sont égales, les côtés correspondants b et c sont égaux; 4° d'exprimer, en fonction de la surface S du triangle et du rayon R du cercle circonscrit, la quantité Z définie par l'égalité

$$2Z=\frac{\alpha'^2-\alpha^2}{\alpha'^2+\alpha^2}\sin A+\frac{\beta'^2-\beta^2}{\beta'^2+\beta^2}\sin B+\frac{\gamma'^2-\gamma^2}{\gamma'^2+\gamma^2}\sin C.$$

(Concours académique, Dijon, 1879.)

82. Étant donnés un angle droit yOx et un point A sur Oy, on prend sur Ox un point M et on porte sur cette même droite une longueur ON telle que l'on ait $ON=k.OM$, k étant une quantité donnée; déterminer la position du point M de telle sorte que l'angle MAN soit égal à un angle donné α; discuter; maximum de l'angle α.

(Concours général, 1863.)

83. Étant donnés un point A et une droite indéfinie xy, trouver sur xy un point P tel que si on construit un triangle rectangle isocèle APM ayant AP pour un côté de l'angle droit et rectangle en P, on ait, en appelant N le point de rencontre de l'hypoténuse avec xy, la relation

$$AM.AN=k^2.$$



84. On donne dans un même plan deux droites parallèles et un point P extérieur à ces droites ; on demande de placer la plus courte distance de ces parallèles de manière qu'elle soit vue du point P sous l'angle maximum.

(Saint-Cyr, 1872.)

85. On donne deux parallèles et dans leur plan deux points A et B compris entre ces parallèles et à égale distance de chacune d'elles ; on demande de mener par B une sécante telle que la partie comprise entre ces parallèles soit vue du point A sous un angle de 45°.

(Saint-Cyr, 1875.)

86. Étant donnés une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre et un point P sur le prolongement du diamètre AB, mener par le point P une sécante qui fasse avec le diamètre AB un angle x qui soit le quart de l'angle sous lequel du centre on voit le segment de cette sécante intérieur au cercle.

(Saint-Cyr, Examen oral.)

87. On donne une demi-circonférence de diamètre AOB, et l'on propose de trouver sur cette demi-circonférence un point M tel que, P désignant la projection sur AB du point N de la circonférence situé sur la parallèle à AB menée par M, on ait

$$\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 = k^2;$$

on prendra pour inconnue l'angle x sous lequel du point O on voit la corde AM; discuter.

88. Étant donné un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre, on demande sous quel angle il faut mener par le point B une droite BC rencontrant en C la demi-circonférence, pour que, la figure tournant autour du diamètre AB, le volume engendré par la surface comprise entre AB, BC et l'arc CA soit la n^e partie du volume engendré par le demi-cercle.

(Baccalauréat, Paris.)

89. Étant donnés un cercle de rayon R, et sur le prolongement d'un diamètre fixe BB′ de ce cercle un point A dont la distance au centre O est égale à a, par le point A on mène une sécante AMM′ faisant avec AO un angle x; soient y et z les angles que font avec le diamètre BB′ les rayons OM, OM′ menés aux points d'intersection de la sécante et du cercle : 1° calculer $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$, en fonctions de R, a, x, et discuter ces expressions; 2° démontrer que le produit



$\operatorname{tg}\frac{y}{2}.\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ est constant, quel que soit x; 3° trouver le minimum de la somme $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$.

(Concours académique, Aix, 1875.)

90. On donne un cercle et un point A dans son plan; déterminer par une formule logarithmique les variations de l'angle sous lequel on voit du point A un diamètre du cercle, lorsque ce diamètre prend toutes les positions possibles autour du centre.

(Concours académique, Dijon, 1877.)

91. On donne un cercle O de rayon R, un diamètre AA′ de ce cercle et sur OA un point fixe I tel que $OI = mR$, m étant positif et moindre que 1; on prend sur la demi-circonférence ABA′ un point mobile M, on mène la corde MIM′ et on fait parcourir au point mobile M la demi-circonférence; on demande de suivre les variations; 1° du produit des distances des points M, M′ au diamètre AA′; 2° de la somme de ces mêmes distances comptées toutes deux positivement; on prendra pour variable l'angle de la corde mobile M′IM avec le rayon fixe OA.

92. Par un point fixe O d'une circonférence de rayon donné R, on mène deux cordes OA, OB, dont la première est fixe et la seconde mobile: étudier les variations de la longueur de la diagonale issue de O dans le parallélogramme construit sur OA et sur OB; maximum et minimum de cette diagonale.

(Concours académique, Clermont, 1879.)

93. On donne un cercle et un point fixe dans son plan, on mène par le point deux droites quelconques faisant entre elles un angle connu; étudier la variation du produit des longueurs des deux cordes interceptées.

(Concours général, 1871.)

94. Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle donné, mener deux cordes qui se coupent sous un angle donné et dont le produit soit maximum ou minimum; examiner le cas où le point donné est à l'extérieur du cercle.

(Concours général, 1873.)

95. Étant donnés une circonférence et un carré circonscrit, trouver la relation qui lie les angles sous lesquels on voit d'un point quelconque de la circonférence les diagonales du carré.

(Concours général, 1864.)



96. Dans un cercle de centre O et de rayon R, on donne un point I dont la distance au centre est égale à a; on prend sur le cercle un point A_1 tel que l'angle IOA_1 soit égal à un angle donné α; on inscrit dans le cercle un polygone régulier de $2n$ sommets, de telle sorte que l'un de ses sommets soit en A_1; démontrer que la somme des carrés des tangentes des angles sous lesquels sont vus du point I les diamètres de ce polygone, est indépendante de l'angle α, et déterminer cette somme.

97. Les traces d'un plan P font avec la ligne de terre des angles α et β; exprimer la tangente de l'angle que fait le plan P avec la ligne de terre en fonction des tangentes des angles α et β.

(Baccalauréat, Paris.)

98. Une portion de droite MN est perpendiculaire en M à un plan P; d'un point A de ce plan, on voit MN sous un angle α; par le point A on mène dans le plan P une droite faisant avec AM un angle ω et l'on prend sur cette droite une longueur AB égale à a; du point B, on voit MN sous un angle β; ceci posé, on demande de calculer la longueur MN en fonction des données α, β et a; indiquer le moyen de choisir entre les deux solutions que l'on trouve.

(Saint-Cyr, 1874.)

99. Deux droites AB, A'B' sont perpendiculaires à un même plan P aux points donnés A et A'; on sait que la longueur de AB est double de celle de A'B'; par le pied A de AB on mène dans le plan P une droite AC faisant avec AA' un angle donné; on demande de trouver sur la droite AC un point d'où l'on verrait les longueurs AB et A'B' sous des angles égaux; discuter.

(Saint-Cyr, 1876.)

100. Le côté de la base d'une pyramide hexagonale régulière est a, sa hauteur est h; exprimer, au moyen de a et de h, le cosinus de l'angle formé par deux faces latérales adjacentes.

(Baccalauréat, Paris.)

101. Deux cônes sont circonscrits à une même sphère suivant deux cercles dont les plans sont parallèles; les génératrices de ces cônes font avec l'axe commun des angles α et α'; exprimer, au moyen des angles α, α' et du rayon R de la sphère : 1° la distance des sommets des deux cônes; 2° le rayon du cercle suivant lequel se coupent les deux cônes; 3° le volume compris entre les deux cônes. On rendra les formules calculables par logarithmes.

(Baccalauréat, Poitiers.)

102. Étant donnés un angle xOy et sur la perpendiculaire en O au plan de l'angle, un point fixe C, on suppose qu'une droite AB de longueur constante se déplace de telle sorte que ses extrémités A et B glissent sur les deux droites fixes Ox, Oy : 1° trouver le minimum de l'angle ACB en supposant l'angle yOx aigu ; 2° en posant $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = h$, $AB = c$, $AOB = \theta$, $ACB = C$, et prenant $c = h \operatorname{tg} \theta$, déterminer, dans ce cas particulier, pour combien de positions de la droite AB l'angle C prend une valeur donnée, et chercher les limites entre lesquelles varie cet angle ; 3° démontrer que les deux cercles décrits l'un du point A comme centre avec le rayon AC dans le plan ACO, l'autre du point B comme centre avec le rayon BC dans le plan BCO, déterminent une sphère de rayon constant.

(Concours académique, Nancy, 1879.)

103. On donne une sphère O et un cercle fixe C sur cette sphère, et on considère tous les cônes qui passent par le cercle C et qui coupent la sphère suivant un second cercle C′ de grandeur constante : 1° trouver le lieu géométrique des sommets de tous ces cônes ; 2° parmi ces cônes, on prend ceux qui ont leur sommet hors de la sphère et qui sont tels que le cercle de sortie C′ soit extérieur au cercle fixe C, et l'on considère sur chacun d'eux les deux génératrices situées dans le plan principal perpendiculaire au plan du cercle C ; déterminer les angles que font ces génératrices avec le plan du cercle C, sachant que le volume du tronc de cône compris entre les cercles C et C′ est équivalent au volume d'une sphère de rayon connu a ; étudier les variations de ce volume quand le sommet du cône se déplace dans l'espace ; pourrait-on, en modifiant convenablement l'énoncé précédent, appliquer les formules trouvées au cas où le sommet du cône est à l'intérieur de la sphère, les cercles C et C′ restant toujours extérieurs l'un à l'autre.

(Agrégation, 1882.)

COMPLÉMENTS.

CHAPITRE I.

QUANTITÉS IMAGINAIRES.

§ I. Forme trigonométrique et représentation géométrique des quantités imaginaires. — § II. Opérations sur les quantités imaginaires.

§ I. — Forme trigonométrique et représentation géométrique des quantités imaginaires.

262. On sait que, si l'on désigne par i le symbole $\sqrt{-1}$, on appelle *quantité imaginaire* toute expression de la forme $a+bi$, où a et b sont des quantités positives ou négatives, que l'on nomme par opposition des quantités *réelles*. On a vu, en algèbre, que l'on convient, pour la généralité des calculs, de désigner par le symbole $\sqrt{-1}$ une quantité dont le carré est égal à -1, et d'appliquer aux quantités dites imaginaires les règles de calcul démontrées dans le cas des quantités réelles.

Par convention, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une quantité imaginaire $a+bi$ soit *nulle* est que l'on ait simultanément $a=0$, $b=0$, de telle sorte que l'égalité

$$a+bi=0$$

entraîne les deux égalités

$$a=0, \qquad b=0,$$

et réciproquement.

Deux quantités imaginaires, $a+bi$ et $a'+b'i$, sont dites *égales* si l'on a simultanément $a=a'$, $b=b'$.

Deux quantités imaginaires sont dites *égales et de signes contraires*, lorsque les parties réelles sont égales et de signes contraires, et

lorsqu'en même temps les coefficients de i sont égaux et de signes contraires; ainsi $a+bi$ et $-a-bi$ sont des quantités imaginaires égales et de signes contraires.

On dit que deux quantités imaginaires sont *conjuguées*, si les parties réelles sont égales entre elles, et si les coefficients de i sont égaux et de signes contraires; ainsi

$$a+bi, \qquad a-bi,$$

sont deux quantités imaginaires conjuguées.

On appelle *module* d'une quantité imaginaire, la racine carrée arithmétique de la somme du carré de la partie réelle et du carré du coefficient de i; le module de la quantité $a+bi$ est $\sqrt{a^2+b^2}$. Deux quantités imaginaires conjuguées ont même module.

263. **Forme trigonométrique d'une quantité imaginaire. Théorème.** *Toute quantité imaginaire peut être mise sous la forme*

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

où r est une quantité réelle essentiellement positive, et où α est un angle nommé argument, qui est déterminé à un multiple de 2π près.

Soit $a+bi$ la quantité imaginaire considérée, et cherchons à déterminer r et α de telle sorte que l'on ait

$$a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=r\cos\alpha+i.r\sin\alpha.$$

D'après les définitions des quantités imaginaires égales, cette égalité entraîne les deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} r\cos\alpha=a \\ r\sin\alpha=b, \end{array}\right.$$

qui permettent de déterminer r et α. En élevant au carré et en ajoutant, on a :

$$r^2=a^2+b^2,$$

et comme r est essentiellement positif par hypothèse,

$$(1) \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

On voit que r n'est autre que le *module* de la quantité imaginaire donnée.

Pour déterminer α, on aura les deux relations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha=\dfrac{a}{r} \\ \sin\alpha=\dfrac{b}{r}; \end{array}\right.$$

ces deux relations déterminent le sinus et le cosinus d'un même angle, puisque la somme de leurs carrés est, en vertu de la valeur de r, égale à l'unité. L'angle α, ainsi déterminé par son sinus et par son cosinus, est connu à un multiple près de 2π, et si α' est l'un quelconque des angles satisfaisant à ces deux relations, on aura :

$$\alpha = 2k\pi + \alpha',$$

k étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

264. **Remarque.** Dans la pratique, pour déterminer l'angle α au moyen des tables, on ne calculera pas par logarithmes cos α et sin α ; on se servira de la formule

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

qu'on obtient en divisant membre à membre les formules (2), parce qu'un angle est mieux déterminé par sa tangente que par ses autres lignes trigonométriques ; mais si l'on emploie la formule (3), tous les angles déterminés par cette formule ne répondent pas à la question, puisque tous les arguments cherchés diffèrent entre eux d'un multiple de 2π, tandis que tous les angles correspondant à une tangente diffèrent entre eux d'un multiple quelconque de π; il faut donc parmi ces angles faire un choix. Si on suppose que α' soit le plus petit angle positif satisfaisant aux relations (2), il ne faudra pas toujours prendre pour α' l'angle fourni par le calcul logarithmique précédent ; en effet, on remarque que, d'après les relations (2),

si on suppose	$a > 0$	$b > 0$,	on a	$0 < \alpha' < \frac{\pi}{2}$
si on suppose	$a < 0$	$b > 0$,	on a	$\frac{\pi}{2} < \alpha' < \pi$
si on suppose	$a < 0$	$b < 0$,	on a	$\pi < \alpha' < \frac{3\pi}{2}$
si enfin on suppose	$a > 0$	$b < 0$,	on a	$\frac{3\pi}{2} < \alpha' < 2\pi$.

Dès lors on calculera par les tables l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, dont la tangente est égale à la valeur absolue de $\frac{b}{a}$; si a et b sont positifs, cet angle sera l'angle α' ; si a est négatif et si b est positif, on prendra pour α' le supplément de l'angle calculé ; si a et b sont négatifs, on prendra pour α' l'angle calculé augmenté de π ; enfin si a étant positif, b est négatif, on prendra pour α' l'excès de 2π sur l'angle calculé.

L'argument étant connu, on calculera r par logarithmes au

moyen de la formule

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}.$$

265. Pour que la quantité $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ soit réelle, il faut et il suffit que l'argument α soit un multiple de π. Si cet argument est un multiple pair de π, la quantité est positive et égale au module r ; si l'argument est un multiple impair de π, la quantité est négative, et égale à $-r$.

266. Il résulte encore de la forme trigonométrique des quantités imaginaires, que, pour que deux quantités imaginaires soient égales, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux et que leurs arguments diffèrent d'un multiple quelconque de 2π; que pour que deux quantités imaginaires soient conjuguées, il faut et il suffit que les modules soient égaux, et que la somme des arguments soit égale à un multiple pair de π.

267. **Représentation géométrique des quantités imaginaires.** Soit $a + bi$ une quantité imaginaire ; traçons, comme nous l'avons fait au nº 22, deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, et construisons dans le plan le point M dont l'abscisse est, par rapport à ce système de coordonnées, égale à a, et dont l'ordonnée est égale à b (*fig.* 86). Menons la droite qui va du point O au point M ; cette droite OM, qui est ainsi définie en grandeur, en direction et en sens, s'appelle une *grandeur géométrique*, et on dit qu'elle représente la quantité imaginaire donnée. Réciproquement, si M est un point quelconque du plan, en menant la droite qui va du point O au point M, on obtient une grandeur géométrique OM; les coordonnées du point M sont connues, et si a est son abscisse, si b est son ordonnée, la quantité imaginaire $a + bi$, représentée par la grandeur géométrique OM, est complètement définie.

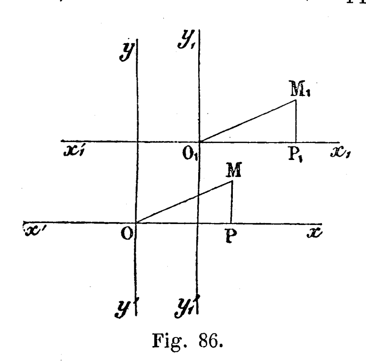


Fig. 86.

268. Soit O_1 un point quelconque du plan, et menons par le point O_1 des axes $x'_1O_1x_1$, $y'_1O_1y_1$ respectivement parallèles à $x'Ox$, $y'Oy$ et de même sens (*fig.* 86). Par rapport au système de coordonnnées $x_1O_1y_1$, construisons la grandeur géométrique O_1M_1 représentant la quantité imaginaire $a + bi$; les deux grandeurs géométriques OM,

O_1M_1 sont égales en grandeur, en direction et en sens ; on dit que ces deux grandeurs sont aussi égales par rapport au système xOy. On voit alors que, sans changer la grandeur géométrique, représentation d'une quantité imaginaire, on peut la transporter dans le plan d'une façon quelconque, pourvu qu'on en conserve la grandeur, la direction et le sens.

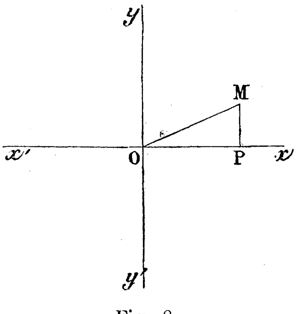


Fig. 87.

269. Ceci posé, soit, par rapport au système rectangulaire xOy, OM la grandeur géométrique représentant la quantité imaginaire $a+bi$, et soit P le pied de l'ordonnée du point M, extrémité de cette grandeur géométrique (*fig.* 87). Le triangle rectangle OPM donne

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2,$$

ou

$$\overline{OM}^2 = a^2 + b^2;$$

donc

$$OM = \sqrt{a^2+b^2};$$

la longueur OM est donc égale au *module* r de la quantité imaginaire donnée. D'ailleurs si on désigne par α l'angle dont il faut faire tourner Ox dans le sens de Ox vers Oy, autour du point O, pour l'appliquer sur OM, et si on projette orthogonalement sur Ox le contour OPM et sa résultante OM, on a, d'après le théorème des projections (78)

$$\overline{OP} = a = r\cos\alpha;$$

en projetant orthogonalement ces deux mêmes contours sur Oy, on aura de même :

$$\overline{PM} = b = r\sin\alpha.$$

On voit donc que l'angle xOM est l'une des valeurs de l'*argument* de la quantité imaginaire ; on aura toutes les valeurs de cet argument en ajoutant à l'angle xOM, $2k\pi$, k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Ainsi la représentation géométrique d'une quantité imaginaire met en évidence son module, qui est la longueur OM, et l'une des

valeurs de son argument qui est l'angle dont il faut faire tourner la demi-droite Ox dans le sens de Ox vers Oy pour l'amener sur OM.

270. Comme conséquences de ce mode de représentation géométrique, on peut faire les remarques suivantes :

1° Une quantité réelle et positive détermine un point situé sur la portion positive Ox de l'axe des x.

2° Une quantité réelle et négative détermine un point situé sur la portion négative Ox' de l'axe des x.

3° Une quantité imaginaire de la forme bi détermine un point

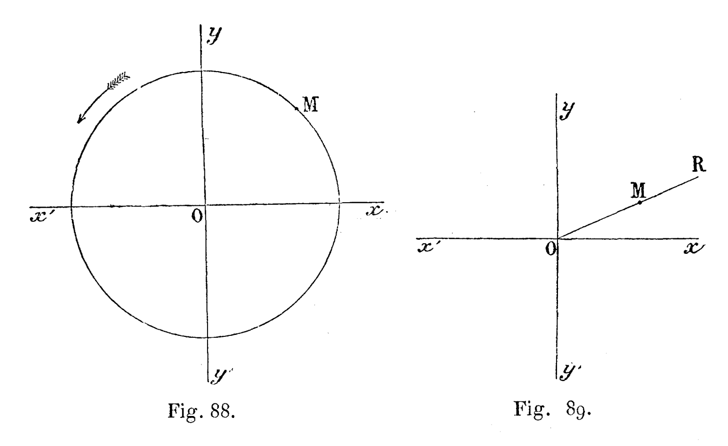


Fig. 88. Fig. 89.

situé sur l'axe des y, sur la portion Oy si b est positif, sur la portion Oy' si b est négatif.

4° Deux quantités imaginaires conjuguées déterminent deux points symétriques par rapport à l'axe de x.

5° Deux quantités imaginaires égales et de signes contraires déterminent deux points symétriques par rapport à l'origine O.

6° Si on fait varier a et b de telle sorte que le module reste constant, le point M se déplace sur une circonférence de centre O (*fig.* 88), et si on fait parcourir au point M toute la circonférence dans le sens des rotations positives (sens de Ox vers Oy), l'argument de la quantité imaginaire augmente de 2π.

7° Si au contraire on fait varier a et b de telle sorte que l'argument reste fixe (*fig.* 89), le point M se déplace sur la demi-droite indéfinie OR, et si on fait croître le module de 0 à $+\infty$, le point M part du point O et décrit la demi-droite indéfinie OR.

§ II. — Opérations sur les quantités imaginaires.

271. La représentation géométrique et la forme trigonométrique des quantités imaginaires permettent d'exprimer simplement les résultats des opérations que l'on peut faire sur les quantités imaginaires.

272. **Addition.** Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, deux quantités imaginaires dont on veut faire la somme ; on a vu en algèbre, qu'on appelle *somme* des quantités imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$, la quantité $(a + a') + (b + b')i$ obtenue en appliquant à ces quantités les règles de calcul démontrées pour les quantités réelles; d'après cette définition, on a :

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i;$$

cette somme est donc une quantité imaginaire Z dont la partie réelle est la somme algébrique des parties réelles des quantités imaginaires données, et dont le coefficient de i est la somme algébrique des coefficients de i dans z et dans z'.

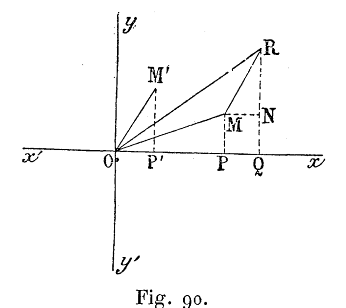


Fig. 90.

Ceci posé, soit OM la grandeur géométrique correspondant à l'imaginaire z, et soit OM' la grandeur géométrique correspondant à z' (*fig.* 90) ; construisons la grandeur géométrique OR correspondant à la somme Z ; son abscisse étant égale à $a + a'$, nous devrons, pour l'obtenir, faire la somme des deux segments $\overline{OP}$ et $\overline{OP'}$, et, par suite, à partir du point P, extrémité du segment $\overline{OP} = a$, porter un segment $\overline{PQ}$ égal en grandeur et en sens au segment $\overline{OP'} = a'$.

Ceci fait, l'ordonnée du point R étant $b + b'$, à partir du point Q, sur la parallèle à l'axe des y menée par ce point Q, nous devrons porter, dans le sens convenable, un segment égal à la somme des deux segments $\overline{PM} = b$, $\overline{P'M'} = b'$; pour cela par M nous mènerons une parallèle MN à Ox jusqu'à sa rencontre en N avec QR, et à partir de N nous prendrons sur QR un segment $\overline{NR}$ égal au segment $\overline{P'M'}$ et de même sens. En joignant l'origine O au point R ainsi déterminé, nous obtiendrons la grandeur géométrique OR représentant la somme Z.

Or, si l'on joint MR, on voit (268) que les deux grandeurs géométriques MR et OM′ sont égales; donc :

Pour obtenir la grandeur géométrique OR *correspondant à la somme* Z *de deux imaginaires z et z′, il suffit de former un contour polygonal, ayant* O *pour origine, et dont les côtés sont des grandeurs géométriques respectivement égales aux grandeurs géométriques qui représentent les quantités imaginaires données; si l'extrémité de ce contour est le point* R, *la droite qui joint l'origine au point* R, *c'est-à-dire la résultante du contour, est la grandeur géométrique qui représente la somme cherchée.*

273. En général, les trois points O, M, R ne sont pas en ligne droite, et forment un triangle OMR; si l'on remarque que, dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres côtés et plus grand que leur différence, on voit que :

Le module de la somme de deux quantités imaginaires est inférieur ou égal à la somme des modules de ces quantités, et supérieur ou égal à leur différence.

274. **Remarque.** La règle que nous venons d'obtenir pour la somme de deux quantités imaginaires peut se généraliser; il suffit pour cela de remarquer que, d'après la définition de la somme de plusieurs quantités imaginaires, l'ordre des termes de la somme est indifférent; dès lors, pour obtenir cette somme, on peut faire la somme des deux premières quantités, ajouter à cette somme la troisième, à la nouvelle somme ajouter la quatrième, etc. On est donc conduit à la règle générale suivante :

Pour faire la somme d'un nombre quelconque de quantités imaginaires, on forme un contour polygonal ayant pour point initial l'origine des axes des coordonnées et dont les côtés sont des grandeurs géométriques respectivement égales aux grandeurs géométriques qui représentent les différentes quantités imaginaires données; la droite qui joint l'origine des coordonnées à l'extrémité de ce contour, c'est-à-dire la résultante de ce contour polygonal, est la grandeur géométrique qui représente la somme cherchée (*fig.* 91).

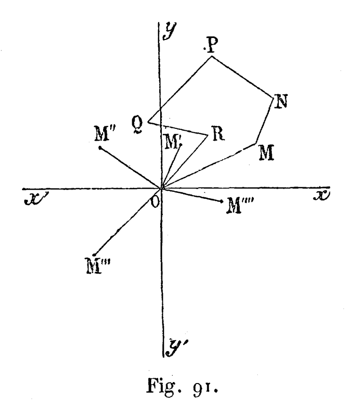


Fig. 91.

275. En général, tous les sommets du contour polygonal et l'origine O ne sont pas en ligne droite; dans ce cas la résultante OR de

la ligne brisée est moindre que la somme des côtés de cette ligne brisée; si tous les sommets et le point O sont en ligne droite, la résultante OR est inférieure ou égale à la somme des côtés du contour; on voit dans tous les cas que :

Le module de la somme de plusieurs quantités imaginaires est inférieur ou égal à la somme des modules de ces quantités.

276. **Soustraction.** Soient $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$, deux quantités imaginaires; on appelle différence entre $a + bi$ et $a' + b'i$ la quantité imaginaire $a - a' + (b - b')i$ qui, ajoutée à la quantité $a' + b'i$, reproduit la première $a + bi$; si donc on pose $Z = z - z'$, on a :

$$Z = z - z' = (a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i.$$

Si l'on écrit Z sous la forme $Z = (a + bi) + (-a' - b'i)$, on voit que former la différence $z - z'$ revient à ajouter à la quantité z une quantité égale et de signe contraire à z'; nous savons d'autre part que deux quantités imaginaires égales et de signes contraires sont représentées par des grandeurs géométriques de même longueur, de même direction, mais de sens opposés; donc :

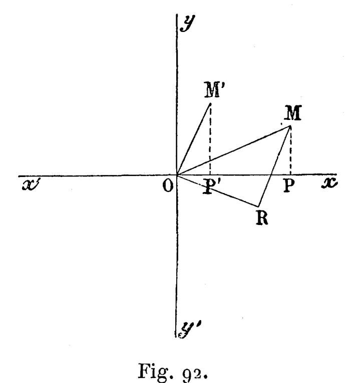


Fig. 92.

Pour retrancher d'une quantité imaginaire z une quantité imaginaire z' (fig. 92), on forme un contour polygonal ayant O *pour origine, dont l'un des côtés est une grandeur géométrique égale à la grandeur géométrique qui représente z, et dont l'autre côté est une grandeur géométrique égale à la grandeur géométrique qui représente z', mais de sens contraire; la résultante* OR *de ce contour est une grandeur géométrique qui représente la différence cherchée.*

277. De la construction, il résulte que :

Le module de la différence de deux quantités imaginaires est inférieur ou égal à la somme des modules de ces quantités et supérieur ou égal à leur différence.

278. **Multiplication.** Nous supposerons désormais les quantités imaginaires mises sous forme trigonométrique.

On appelle *produit* de deux quantités imaginaires une troisième quantité formée au moyen de celles-ci, d'après les règles de calcul

démontrées pour les quantités réelles, en ayant soin de remplacer dans les calculs i^2 par -1.

Soient les deux imaginaires

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha');$$

on a, pour leur produit, d'après la règle de multiplication des quantités réelles,

$$\begin{aligned} zz' &= \left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right] \times \left[r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')\right] \\ &= rr'\left[(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha')\right] \\ &= rr'\left[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')\right]. \end{aligned}$$

Donc : *le produit de deux quantités imaginaires est une quantité imaginaire dont le module est égal au produit des modules et dont l'argument est la somme des arguments des deux facteurs.*

Il résulte de là que si OM et OM′ sont les deux grandeurs géométriques représentant les imaginaires z et z' (*fig.* 93), pour avoir la grandeur géométrique OR correspondant au produit zz', on fera tourner la grandeur géométrique OM d'un angle égal à l'argument de z' dans le sens convenable, et sur le rayon OR ainsi obtenu, on portera une longueur OR égale au produit des valeurs numériques des deux modules donnés.

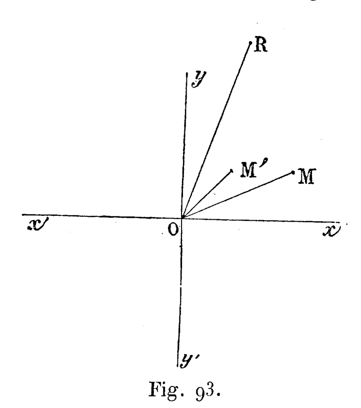


Fig. 93.

279. Je dis que d'une manière générale : *Le produit d'un nombre quelconque de quantités imaginaires est une quantité imaginaire ayant pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.*

Pour démontrer cette règle, il suffit, puisqu'elle est établie dans le cas de deux facteurs, de montrer que, si elle est vraie pour $n-1$ facteurs, elle est vraie dans le cas de n facteurs. Supposons donc que $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, étant $n-1$ facteurs imaginaires, de modules respectifs $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$, et d'arguments respectifs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{n-1}$, on ait :

$$z_1 z_2 \ldots z_{n-1} = r_1 r_2 \ldots r_{n-1}\left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})\right].$$

Soit

$$z_n = r_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n),$$

une nouvelle quantité imaginaire, et multiplions membre à membre ces deux égalités; nous aurons :

$$z_1 z_2 \ldots z_{n-1} z_n =$$
$$r_1 r_2 \ldots r_{n-1} \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1}) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1})\right] \times r_n (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n),$$

ou, d'après la règle de la multiplication de deux imaginaires,

(1) $$z_1 z_2 \ldots z_{n-1} z_n =$$
$$r_1 r_2 \ldots r_{n-1} r_n \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n)\right];$$

or, ce produit est formé d'après la règle indiquée; donc la loi est générale.

Il est bon de remarquer que le produit de plusieurs facteurs imaginaires est indépendant de l'ordre des facteurs.

280. **Division.** Soit à diviser $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ par la quantité imaginaire $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$. Diviser la quantité imaginaire z par la quantité imaginaire z', c'est, par *définition*, trouver une quantité de même forme, nommée *quotient*, qui, multipliée par z', reproduise z. Si donc

$$\rho(\cos \omega + i \sin \omega)$$

est le quotient inconnu, on devra avoir :

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') \times \rho(\cos \omega + i \sin \omega),$$

ou

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r'\rho\left[\cos(\alpha' + \omega) + i \sin(\alpha' + \omega)\right].$$

Nous avons vu que, pour que deux quantités imaginaires soient égales, il faut et il suffit que les modules soient égaux et que les arguments diffèrent d'un multiple quelconque de 2π: on devra donc avoir :

$$r'\rho = r, \qquad \text{et} \qquad \alpha' + \omega = \alpha + 2k\pi,$$

d'où

$$\rho = \frac{r}{r'}, \qquad \omega = \alpha - \alpha' + 2k\pi;$$

on a donc :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha')\right].$$

Donc : *Le quotient de deux quantités imaginaires est une quantité*

imaginaire dont le module est égal au quotient du module du dividende par le module du diviseur, et dont l'argument est l'excès de l'argument du dividende sur l'argument du diviseur.

281. **Puissance.** Soit $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ une quantité imaginaire, et proposons-nous de former

$$z^m = \left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^m,$$

en supposant m entier et positif; z^m n'est autre, par *définition*, que le produit de m facteurs imaginaires égaux à z; d'après la règle de la multiplication (279), on aura :

$$(2) \qquad z^m = \left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^m = r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha).$$

Donc : *la m^e puissance d'une quantité imaginaire, m étant entier et positif, est une quantité imaginaire dont le module est la m^e puissance du module de l'imaginaire donnée, et dont l'argument est le produit de l'argument primitif par l'exposant de la puissance.*

282. **Remarque.** La formule (2) est encore applicable si l'exposant m est entier, mais négatif. Posons en effet $m = -m'$, nous aurons, m' étant entier et positif,

$$\begin{aligned} z^{-m'} &= \left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^{-m'} = \frac{1}{\left[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^{m'}} \\ &= \frac{1}{r^{m'}(\cos m'\alpha + i\sin m'\alpha)} = \frac{1}{r^{m'}}\left[\cos m'\alpha - i\sin m'\alpha\right] \\ &= r^{-m'}\left[\cos(-m'\alpha) + i\sin(-m'\alpha)\right], \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

283. **Formule de Moivre.** Dans la formule (2) qui donne l'expression de la m^e puissance d'une quantité imaginaire, m étant entier, supposons le module égal à 1; la formule (2) devient alors

$$(3) \qquad \left[\cos\alpha + i\sin\alpha\right]^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha;$$

cette formule porte le nom de *formule de Moivre*, et elle est, en trigonométrie, la base de la théorie de la multiplication et de la division des arcs.

284. **Racine.** *On appelle racine m^e d'une quantité réelle ou imaginaire*

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

une quantité imaginaire de même forme, qui, élevée à la puissance m, reproduise la quantité donnée.

Supposons que

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

soit une racine m^{me} de z; cherchons à déterminer ρ et ω, nous devrons avoir

$$\begin{aligned} r(\cos\alpha + i\sin\alpha) &= \left[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)\right]^m \\ &= \rho^m(\cos m\omega + i\sin m\omega), \end{aligned}$$

puisque m est entier et positif. Ces deux quantités imaginaires devant être égales, les modules doivent être égaux, et les arguments doivent différer d'un multiple de 2π; l'égalité précédente entraîne donc les deux relations

$$\rho^m = r, \qquad m\omega = 2k\pi + \alpha,$$

k étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; mais r est un nombre positif qui admet une racine m^e positive et une seule, ρ est essentiellement positif par hypothèse; par suite, si on désigne par $r^{\frac{1}{m}}$ la racine m^e arithmétique de r, on aura :

$$\rho = r^{\frac{1}{m}} \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m};$$

on aura donc :

$$(1)\ \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}\right)\right].$$

Cherchons combien on obtient de valeurs distinctes pour $\sqrt[m]{z}$. Or, si on donne, dans la formnle (1), à k deux valeurs quelconques différant entre elles d'un multiple de m, on obtient deux arcs qui diffèrent d'un multiple de 2π, et qui, par conséquent, ont le même cosinus et le même sinus; on obtient donc pour $\sqrt[m]{z}$, dans les deux cas, la même valeur. Il suffit par suite, pour obtenir toutes les valeurs de $\sqrt[m]{z}$, de donner m valeurs entières consécutives à k, par exemple les m valeurs

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots\ldots \quad m-1.$$

On obtient ainsi les racines dont les arguments sont en progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{m}$, et ont pour valeurs

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad 2.\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \ldots\ldots \quad (m-1)\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m};$$

or, les arcs extrêmes ayant une différence $(m-1)\frac{2\pi}{m}$ plus petite que 2π, deux quelconques de ces arcs ont une différence moindre que 2π et ne peuvent admettre simultanément le même sinus et le même cosinus. Donc, toutes les quantités imaginaires correspondantes sont distinctes, et on voit que :

Toute quantité réelle ou imaginaire admet m racines m^{es} réelles ou imaginaires distinctes, et m seulement.

285. On peut représenter géométriquement ces m racines; considérons deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (*fig.* 94), et décrivons

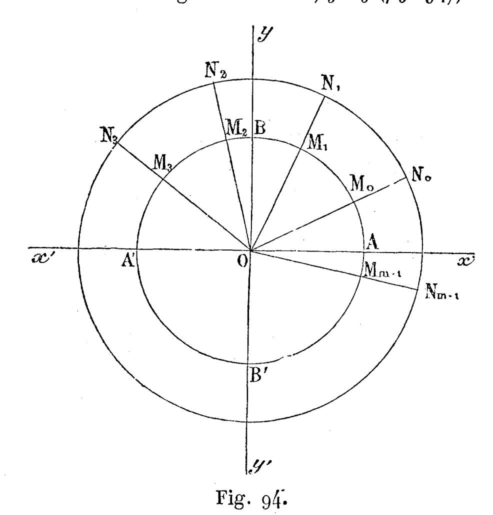


Fig. 94.

du point O comme centre une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur; soit A le point d'intersection de cette circonférence avec la portion positive Ox de l'axe des x. A partir du point A, sur cette circonférence, prenons dans le sens convenable un arc AM_0 égal en grandeur et en signe à l'arc $\frac{\alpha}{m}$, puis, à partir du point M_0, partageons la circonférence en m parties égales; soient M_0, M_1, M_2,..... M_{m-1} les points de divisions obtenus. Si nous joignons l'origine O à ces m points de division, les m rayons OM_0, OM_1, OM_2,..... OM_{m-1}, sont des grandeurs géométriques de module égal à l'unité, et dont les arguments ont respectivement pour valeurs

$$\frac{\alpha}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+2.\frac{2\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{\alpha}{m}+(m-1)\frac{2\pi}{m}.$$

Prenons enfin sur chacune de ces grandeurs géométriques, à partir de O, une longueur égale à $r^{\frac{1}{m}}$; les nouvelles grandeurs géométriques ON_0, ON_1,....., ON_{m-1}, représentent (269) les m racines m^{es} de la quantité donnée z, et l'on voit, d'après la construction, que leurs extrémités sont toutes situées sur une circonférence de centre O, de rayon $r^{\frac{1}{m}}$, et sont sur cette circonférence les sommets d'un polygone régulier de m sommets.

De cette représentation géométrique, il résulte que, si m est pair, les m racines m^{es} sont deux à deux égales et de signes contraires et qu'il ne peut exister au plus que deux racines m^{es} réelles, et seulement si m est pair.

286. *Discussion.* 1° Supposons que la quantité donnée z soit *réelle* et *positive,* elle est égale à son module r; cherchons ce que sont les m racines m^{es}. La quantité z étant réelle et positive, on peut toujours supposer que son argument α qui est égal à un multiple pair de π soit pris égal à 0. On aura alors :

$$(2) \qquad \sqrt[m]{r} = r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right].$$

Pour qu'une racine soit réelle et positive, il faut que l'argument $\frac{2k\pi}{m}$ soit égal à un multiple pair de π, $\frac{2k\pi}{m} = 2h\pi$, d'où $k = mh$, et comme k est positif et inférieur à m, il faut que l'on ait $h = 0$, et par suite $k = 0$; donc on obtient une racine m^e positive et une seule.

Pour qu'une racine soit réelle et négative, il faut que l'argument $\frac{2k\pi}{m}$ soit égal à un multiple impair de π, $(2h+1)\pi$, d'où

$$\frac{2k\pi}{m} = (2h+1)\pi, \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{(2h+1)m}{2};$$

or k est entier, $2h+1$ est impair; donc si m est impair, l'égalité est impossible. Si m est pair, comme k est inférieur à m, il faut que h soit nul, et alors $k = \frac{m}{2}$; donc si m est pair, et seulement dans ce cas, on obtient une racine m^e réelle, négative, d'ailleurs égale en valeur absolue à la racine m^e réelle et positive.

Pour que deux racines d'arguments $\frac{2k\pi}{m}$, $\frac{2k'\pi}{m}$, k étant différent de k', soient conjuguées, il faut et il suffit que la somme de leurs



arguments soit égale à un multiple pair de π,

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{2k'\pi}{m}=2h\pi,$$

d'où

$$k+k'=mh,$$

et comme k et k' sont positifs, distincts et moindres que m, il faut que h soit égal à 1 et que l'on ait :

$$k+k'=m.$$

On voit donc qu'à toute valeur de k, sauf zéro et sauf la valeur $\frac{m}{2}$ si m est pair, c'est-à-dire sauf le cas des racines réelles, correspond une valeur de k' distincte de k; donc toutes les racines *imaginaires* sont deux à deux conjuguées.

En résumé : *Si m est impair, toute quantité réelle et positive admet une racine m^e positive et une seule, et $m-1$ racines m^{es} imaginaires conjuguées deux à deux;*

Si m est pair, toute quantité réelle et positive admet deux racines m^{es} réelles, égales et de signes contraires, et $m-2$ racines imaginaires conjuguées deux à deux.

287. La représentation géométrique des m racines m^{es} conduit immédiatement aux résultats précédents. En effet, α étant égal à 0, le sommet M_0 se confond avec le point A ; le point N_0 étant situé alors sur Ox, il existe une racine réelle et positive ON_0. Si m est pair, il y aura une seconde racine réelle, négative, égale et de signe contraire à la précédente, il n'y en a pas si m est impair; dans les deux cas, toutes les autres racines sont imaginaires ; et comme le polygone est symétrique par rapport à Ox, ces racines imaginaires sont deux à deux conjuguées.

288. 2° Supposons la quantité donnée *réelle*, mais *négative;* elle est égale et de signe contraire à son module, on peut toujours supposer que son argument α est égal à π ; on aura alors, $-r$ étant cette quantité,

$$(3) \qquad \sqrt[m]{-r}=r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right].$$

Pour qu'une racine pût être réelle et positive, il faudrait que son argument fût égal à un multiple pair de π, que l'on eût $\frac{(2k+1)\pi}{m}=2h\pi$, d'où $2k+1=2mh$, ce qui est impossible, puisque $2k+1$ est impair et $2mh$ pair ; donc il n'existe, dans ce cas, aucune racine réelle et positive.

Pour qu'une racine soit réelle et négative, il faut que son argument $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ soit égal à un multiple impair de π, $\frac{(2k+1)\pi}{m}=(2h+1)\pi$, d'où $2k+1=(2h+1)m$; cette égalité n'est pas possible si m est pair; donc si m est pair, il n'existe aucune racine réelle négative. Supposons m impair; dans ce cas, comme k est inférieur à m, il faut que h soit nul, et on aura $k=\frac{m-1}{2}$; donc si m est impair, on obtient une racine réelle négative et une seule.

Pour que deux racines d'arguments $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, $\frac{(2k'+1)\pi}{m}$, k' étant différent de k, soient conjuguées, il faut et il suffit que la somme de leurs arguments soit égale à un multiple pair de π,

$$\frac{(2k+1)\pi}{m}+\frac{(2k'+1)\pi}{m}=2h\pi,$$

d'où

$$k+k'=mh-1,$$

et comme k et k' sont positifs, distincts et moindres que m, il faut que h soit égal à 1, et que l'on ait

$$k+k'=m-1.$$

On voit qu'à toute valeur de k, sauf $\frac{m-1}{2}$ si m est impair, correspond une valeur k' distincte de k et une seule; donc toutes les racines imaginaires sont deux à deux conjuguées.

En résumé : *Si m est impair, une quantité réelle et négative admet une racine m^e négative et une seule, et $m-1$ racines m^{es} imaginaires conjuguées deux à deux;*

Si m est pair, une quantité réelle et négative n'admet pas de racine m^e réelle, mais admet m racines m^{es} distinctes, imaginaires conjuguées deux à deux.

289. La représentation géométrique des racines conduit aux mêmes conclusions; dans ce cas, en effet, $\frac{\alpha}{m}$ étant égal à $\frac{\pi}{m}$, et chacune des divisions M_0M_1, M_1M_2, etc., valant $\frac{2\pi}{m}$, les sommets M^0 et M_{m-1} sont, sur le cercle trigonométrique, symétriques par rapport au diamètre $x'Ox$; les points N_0 et N_{m-1} jouissent de la même propriété, et les sommets $N_0, N_1, N_2, \ldots.. N_{m-1}$, sont symétriques deux à deux par rapport à $x'Ox$; on voit donc encore ainsi que les racines sont deux à deux imaginaires conjuguées.

Il ne peut d'ailleurs exister aucun sommet sur la portion positive Ox, et il n'en existera un sur la portion négative Ox' de $x'Ox$ que si m est impair; donc, si m est pair, il n'existe pas de racine m^{me} réelle; si m est impair il existe une seule racine m^{me} réelle, et cette racine est négative; toutes les racines imaginaires sont deux à deux conjuguées.

290. 3° Supposons enfin que la quantité donnée z soit imaginaire; l'argument α ne sera pas égal à un multiple de π. Il est facile de voir qu'aucune des racines m^{es} de z ne peut être réelle; il faudrait pour cela que l'on eût :

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}=h\pi,$$

d'où $\alpha=(mh-2k)\pi$, ce qui exigerait que α fût un multiple de π, ou que la quantité donnée z fût réelle.

Deux racines quelconques ne peuvent être imaginaires conjuguées; il faudrait pour cela que la somme de leurs arguments fût égale à un multiple pair de π, c'est-à-dire que l'on eût :

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}+\frac{2k'\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}=2h\pi,$$

ou

$$\alpha=(mh-k-k')\pi,$$

ce qui exigerait que la quantité z fût réelle.

Donc : *Toute quantité imaginaire admet m racines m^{es} distinctes imaginaires et non conjuguées.*

291. La représentation géométrique des racines montre que, dans ce cas, les m racines sont les m rayons d'un polygone régulier qui n'a aucun sommet sur l'axe $x'Ox$, et qui n'a pas de rayons symétriques par rapport à $x'Ox$; ce qui montre à nouveau que les m racines sont imaginaires et non conjuguées.

292. **Remarque.** Si l'on considère deux quantités imaginaires conjuguées

$$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\qquad z'=r(\cos\alpha-i\sin\alpha),$$

nous venons de voir que chacune de ces quantités admet m racines m^{es} distinctes, imaginaires et non imaginaires conjuguées. Il est facile de montrer que les m racines m^{es} de z sont respectivement imaginaires conjuguées des m racines m^{es} de z'. On a en effet

$$\sqrt[m]{z}=\sqrt[m]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}\right)\right],$$

$$\sqrt[m]{z'}=\sqrt[m]{r[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]}=r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}\right)+i\sin\left(\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}\right)\right];$$

or, on a vu (266) que la condition nécessaire et suffisante pour que deux quantités imaginaires soient conjuguées, est que les modules soient égaux et que la somme des arguments soit égale à un multiple pair de π; comme toutes les valeurs de $\sqrt[m]{z}$ et de $\sqrt[m]{z'}$ ont le même module, il suffit de montrer qu'à l'argument $\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}$ d'une racine m^e quelconque de z correspond un argument $\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}$ d'une racine m^e convenablement choisie de z' telle que l'on ait :

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}+\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}=2h\pi,$$

ou $k+k'=mh$; or, si on s'assujettit à ne donner à k et à k' que les valeurs 0, 1....., $m-1$, il faut prendre h égal à l'unité et l'on a $k'=m-k$. On voit ainsi qu'à chaque valeur de k correspond une valeur de k' et une seule; donc : *si deux quantités imaginaires sont conjuguées, les m racines m^{mes} de la première sont respectivement imaginaires conjuguées des m racines m^{mes} de la seconde.*

EXERCICES SUR LE CHAPITRE Ier.

1. Si on considère la quantité imaginaire

$$z=\frac{\alpha+\beta\lambda+i(\alpha'+\beta'\lambda)}{\gamma+\delta\lambda+i(\gamma'+\delta'\lambda)}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, sont des quantités réelles données et où λ est un paramètre réel et variable, pour chaque valeur de λ, z prend la forme $A+Bi$; démontrer que le point M de coordonnées $x=A$, $y=B$, par rapport à un système d'axes rectangulaires, décrit un cercle.

(M. Laguerre.)

2. Soit $z=x+yi$ une variable imaginaire, x et y étant des variables réelles; soit $f(z)$ une fonction de z telle que si on y remplace z par $x+yi$, on ait $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$; si on donne à x un accroissement Δx, à y un accroissement Δy, z prend un accroissement correspondant Δz, et la fonction $f(z)$ prend l'accroissement $f(z+\Delta z)-f(z)$; démontrer que, pour que le rapport $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ tende vers une limite déterminée quels que soient les accroissements Δx et Δy pourvu que ces deux accroissements tendent simultanément vers zéro, c'est-à-dire



pour que la fonction $f(z)$ ait une dérivée par rapport à z, la condition nécessaire et suffisante est que l'on ait :

$$\varphi'_x(x,y) = \psi'_y(x,y) \quad \text{et} \quad \varphi'_y(x,y) = -\psi'_x(x,y).$$

3. Soit z une variable imaginaire, $z = x + yi$, x et y étant des variables réelles; soit $Z = f(z)$ une fonction donnée de z admettant une dérivée ; démontrer que, si l'on fait décrire à la variable z deux courbes se coupant en un point m du plan sous l'angle θ, la fonction Z décrira deux courbes qui se coupent en un certain point M, correspondant au point m, sous le même angle θ; cas particuliers où les deux courbes primitives sont orthogonales, où le point z décrit successivement une parallèle à l'axe des x, une parallèle à l'axe des y, etc.

4. Soit $f(z) = 0$ une équation algébrique de degré m; si on pose $z = x + yi$, $f(z)$ prend la forme $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$; démontrer que, par rapport à un système d'axes rectangulaires, les deux courbes $\varphi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$ se coupent orthogonalement en m points réels.

CHAPITRE II.

FORMULES GÉNÉRALES D'ADDITION, DE MULTIPLICATION ET DE DIVISION DES ARCS.

§ I. Formules générales d'addition des arcs. — § II. Formules générales de multiplication des arcs. — § III. Division des arcs.

§ I. — Formules générales d'addition des arcs.

293. On a vu, dans la théorie de la multiplication des quantités imaginaires (279), que le produit d'un nombre quelconque de quantités imaginaires est une quantité imaginaire dont le module est le produit des modules des quantités imaginaires données et dont l'argument est la somme de leurs arguments. Supposons que les quantités imaginaires considérées aient toutes pour module l'unité, on aura alors :

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\ldots\ldots(\cos\lambda+i\sin\lambda)\\ &\qquad=\cos(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda)+i\sin(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda).\end{aligned}$$

D'autre part, si dans chacun des facteurs du premier membre de la relation (1), on met le cosinus de l'arc correspondant en facteur, on peut écrire le premier membre sous la forme

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\ldots\ldots(\cos\lambda+i\sin\lambda)\\ &=\cos\alpha\cos\beta\ldots\ldots\cos\lambda(1+i\operatorname{tg}\alpha)(1+i\operatorname{tg}\beta)\ldots\ldots(1+i\operatorname{tg}\lambda);\end{aligned}$$

désignons par S_1 la somme des tangentes des arcs $\alpha, \beta\ldots\ldots, \lambda$, par S_2 la somme de leurs produits deux à deux, par S_3 la somme de leurs produits trois à trois, etc.; remarquons de plus que les puissances successives de i se reproduisent de 4 en 4, de telle sorte que

$$i^{4k}=1,\qquad i^{4k+1}=i,\qquad i^{4k+2}=-1,\qquad i^{4k+3}=-i.$$

On pourra dès lors, d'après une formule connue relative à un produit de facteurs binômes dont tous les premiers termes sont égaux entre eux, les seconds termes étant distincts, mettre le second membre de la relation précédente sous la forme

$$\cos\alpha\cos\beta\ldots\ldots\cos\lambda(1+iS_1-S_2-iS_3+S_4+\ldots\ldots),$$



ou encore

$$\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\lambda\left[(1-S_2+S_4-S_6+\ldots)+i(S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots)\right].$$

On a donc, en remplaçant le premier membre de la relation (1) par cette valeur,

$$(2)\qquad \cos(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)+i\sin(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\ldots\ldots\cos\lambda\left[(1-S_2+S_4-S_6+\ldots)+i(S_1-S_3+S_5-\ldots)\right].$$

En égalant entre elles les parties réelles et entre eux les coefficients de i, on a les deux formules cherchées

$$(3)\quad \cos(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)=\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\lambda\,[1-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots]$$
$$(4)\quad \sin(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)=\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\lambda\,[S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots].$$

Les formules (3) et (4) donnent le cosinus et le sinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction entière et rationnelle des cosinus et des tangentes de ces arcs; si d'ailleurs on remplace chacune des tangentes par le rapport du sinus au cosinus, et si on réduit les termes de chaque crochet au plus petit dénominateur commun, ce dénominateur sera le produit $\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\lambda$, et disparaîtra, puisque ce produit est en facteur devant chaque crochet. Donc les formules (3) et (4) résolvent le problème général de l'addition des arcs relativement au cosinus et au sinus et fournissent le théorème suivant :

Le cosinus et le sinus de la somme d'un nombre quelconque d'arcs s'expriment en fonction entière et rationnelle des sinus et des cosinus de ces arcs (89).

294. En divisant membre à membre les formules (3) et (4), on a

$$(5)\qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda)=\frac{S_1-S_3+S_5-S_7+\ldots\ldots}{1-S_2+S_4-S_6+\ldots\ldots},$$

et cette formule montre que :

La tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs s'exprime en fonction rationnelle des tangentes de ces arcs (90).

§ II. — Formules générales de multiplication des arcs.

295. Proposons-nous, étant données les lignes trigonométriques d'un arc a, de trouver le sinus, le cosinus et la tangente d'un multiple entier quelconque ma de cet arc.

La formule de Moivre (283) donne

$$(1)\qquad (\cos a + i \sin a)^m = \cos ma + i \sin ma.$$

Développons le premier membre par la formule du binôme; nous aurons:

$$(\cos a + i \sin a)^m =$$

$$^{m} a + \frac{m}{1} i \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} i \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots$$

ou, en réunissant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(\cos a + i \sin a)^m =$$

$$\cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots$$

$$+ i\left[\frac{m}{1} \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots\right].$$

On a donc, en égalant les deux expressions de $(\cos a + i \sin a)^m$,

$$(2)\qquad \cos ma + i \sin ma =$$

$$\cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots$$

$$+ i\left[\frac{m}{1} \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots\ldots\right].$$

On en conclut, en égalant entre elles les parties réelles et entre eux les coefficients de i,

$$(3)\qquad \cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a \ldots,$$

$$(4)\qquad \sin ma = \frac{m}{1} \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{m-5} a \sin^5 a \ldots,$$

ce sont les formules cherchées relatives au cosinus et au sinus.

296. Remarquons que l'équation (3) qui donne $\cos ma$ ne renferme $\sin a$ qu'à des puissances paires; si donc on y remplace $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$, on pourra exprimer $\cos ma$ en fonction entière et rationnelle de $\cos a$; le second membre sera par rapport à $\cos a$ de degré m et ne renfermera $\cos a$ qu'à des puissances de même parité que m.

Dans l'équation (4) qui donne $\sin ma$, si m est impair, $\cos a$ n'entre qu'à des puissances paires, et en remplaçant $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, $\sin ma$ sera exprimé en fonction rationnelle de $\sin a$, par un polynôme de degré m en $\sin a$ et ne contenant $\sin a$ qu'à des puissances impaires. — Au contraire, si m est pair, $\cos a$ n'entre dans le second membre de l'équation (4) qu'à des puissances impaires; si on met $\cos a$ en facteur, la parenthèse ne renfermera $\cos a$ qu'à des puissances paires; si on remplace $\cos a$ par sa valeur en fonction de $\sin a$, la parenthèse s'exprimant en fonction rationnelle de $\sin a$, comme $\cos a$ est en facteur devant cette parenthèse, on voit que $\sin ma$ s'exprimera en fonction entière, mais non rationnelle de $\sin a$ et que l'on aura pour $\sin ma$ deux valeurs égales et de signes contraires en fonction de $\sin a$.

297. Ces résultats s'expliquent aisément. En effet, $\cos a$ étant donné, les arcs correspondant à ce cosinus sont compris dans la formule $a = 2k\pi \pm \alpha$, α étant l'un d'eux; comme l'on cherche $\cos ma$, on devra trouver le cosinus de tous les arcs compris dans la formule $ma = 2mk\pi \pm m\alpha$, et on voit que tous ces arcs ont le même cosinus que l'arc $m\alpha$; on doit donc trouver pour $\cos ma$ une seule valeur en fonction de $\cos a$.

Au contraire, $\sin a$ étant donné, les arcs correspondants sont compris dans l'une ou l'autre des deux formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

α étant l'un quelconque d'entre eux; donc les arcs ma sont compris dans les deux formules

$$ma = 2mk\pi + m\alpha, \qquad ma = m(2k+1)\pi - m\alpha.$$

Si m est impair, ces deux séries d'arcs n'admettent qu'un sinus, on ne doit obtenir pour $\sin ma$ qu'une seule valeur en fonction de $\sin a$; si m est pair, les arcs de ces deux séries ont des sinus égaux et de signes contraires, et on doit obtenir pour $\sin ma$ deux valeurs égales et de signes contraires en fonction de $\sin a$.

298. Si nous divisons membre à membre les relations (3) et (4),



nous aurons :

$$\operatorname{tg} ma=\frac{\sin ma}{\cos ma}=\frac{\frac{m}{1}\cos^{m-1}a\sin a-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}a\sin^3 a+\ldots}{\cos^m a-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a+\frac{m(m-1)\ldots(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}a\sin^4 a-\ldots};$$

divisons les deux termes de la fraction qui sont homogènes et de degré m en $\sin a$ et $\cos a$, par $\cos^m a$, et remarquons que $\operatorname{tg} a=\frac{\sin a}{\cos a}$; nous aurons :

$$(5)\quad \operatorname{tg} ma=\frac{m\operatorname{tg} a-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3 a+\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5 a-\ldots}{1-\frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2 a+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4 a-\ldots}.$$

C'est la formule cherchée ; elle montre que $\operatorname{tg} ma$ s'exprime en fonction rationnelle de $\operatorname{tg} a$, le numérateur contenant $\operatorname{tg} a$ aux puissances impaires seulement, le dénominateur aux puissances paires seulement.

§ III. — Division des arcs.

299. Nous nous proposons, étant donné $\cos a$, ou $\sin a$, de calculer $\cos\frac{a}{m}$ et $\sin\frac{a}{m}$, étant donné $\operatorname{tg} a$ de calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$, m étant un nombre entier positif quelconque.

300. **Problème I.** *Étant donné $\cos a$, calculer $\cos\frac{a}{m}$.*

En remplaçant dans la formule

$$\cos ma=\cos^m a-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}a\sin^2 a+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}a\sin^4 a-\ldots$$

a par $\frac{a}{m}$, on obtient la relation

$$\cos a=\cos^m\frac{a}{m}-\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\frac{a}{m}\sin^2\frac{a}{m}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\frac{a}{m}\sin^2\frac{a}{m}-\ldots$$

Le second membre est une fonction rationnelle entière du m^{me} degré de $\cos\frac{a}{m}$ et de $\sin\frac{a}{m}$, dans laquelle $\sin\frac{a}{m}$ ne figure que par des puissances paires, et $\cos\frac{a}{m}$ que par des puissances de même



parité que m. Soit $\cos a = \lambda$; si on pose $\cos\frac{a}{m} = x$, et si l'on remplace $\sin^2\frac{a}{m}$ par $1 - x^2$, on obtient une équation de la forme

$$f(x) - \lambda = 0,$$

dans laquelle $f(x)$ est un polynome entier en x du m^{me} degré, ne renfermant x qu'à des puissances de même parité que m.

Si m est pair, cette équation a ses racines deux à deux égales et de signes contraires.

301. Il est facile d'expliquer pourquoi, lorsqu'on calcule $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$, on trouve m valeurs, et pourquoi, si m est pair, ces valeurs sont deux à deux égales et de signes contraires. Portons sur le diamètre AA′ du cercle trigonométrique, à partir du centre O, dans le sens convenable suivant le signe de $\cos a$, une longueur OP égale à la valeur absolue de ce cosinus (*fig.* 95); menons la perpendiculaire à AA′ par le point P, et soient M et M′ les points de rencontre de cette perpendiculaire et du cercle, M étant celui de ces deux points qui, par rapport à AA′, est du même côté que le point B. L'arc a n'est pas déterminé : c'est l'un quelconque des arcs qui, ayant le point A pour origine, ont pour extrémité soit le point M, soit le point M′. Quand on calcule $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$, on doit donc trouver les cosinus des m^{mes} parties de tous les arcs, d'origine A, terminés soit en M, soit en M′.

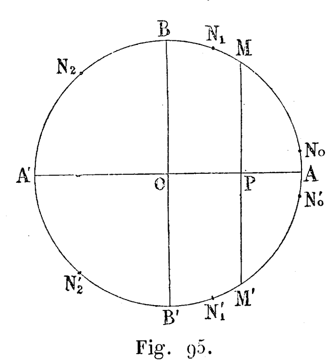


Fig. 95.

Parmi tous les arcs terminés en M, il y en a un compris entre 0 et π; appelons-le α; soit N_0 l'extrémité d'un arc, d'origine A, égal à $\frac{\alpha}{m}$. On obtient tous les arcs terminés en M en augmentant, ou en diminuant, l'arc α d'une, deux, trois,..... circonférences; et, par suite, on obtient les m^{mes} parties des arcs terminés en M en augmentant, ou en diminuant, $\frac{\alpha}{m}$ d'une, deux, trois,..... fois la m^{me} partie de la circonférence. Or, si l'on ajoute à l'arc $\frac{\alpha}{m}$, qui est ter-

miné en N_0, une, deux, trois,..... $m-1$, fois la m^{me} partie de la circonférence, les nouveaux arcs que l'on obtient ont pour extrémités les sommets N_1, N_2,..... N_{m-1}, d'un polygone régulier P de m côtés, inscrit dans le cercle, et ayant un sommet en N_0. Si l'on ajoute au dernier de ces arcs la m^{me} partie de la circonférence, on retrouve pour extrémité de l'arc le point N_0, et en continuant, on retrouve indéfiniment, pour extrémités des arcs considérés, les sommets du polygone P. Si au lieu d'augmenter l'arc $\frac{\alpha}{m}$ d'une, deux, trois,..... fois la m^{me} partie de la circonférence, on le diminue de ces mêmes arcs, on retrouve, pour extrémités, les mêmes sommets du polygone P, mais en ordre inverse. Donc, les m^{mes} parties des arcs terminés en M sont les arcs terminés aux sommets du polygone P.

Soit N'_0 le point symétrique du point N_0 par rapport au diamètre AA'; on verra de même que les m^{mes} parties des arcs terminés au point M' sont les arcs qui ont pour extrémités les sommets N'_0, N'_1, N'_2, ... N'_{m-1}, d'un polygone régulier P' de m côtés, inscrit dans le cercle et ayant un sommet en N'_0.

Les sommets du polygone P' sont symétriques aux sommets du polygone P par rapport au diamètre AA', et, par suite, les cosinus des arcs terminés aux sommets du polygone P' sont égaux aux cosinus des arcs terminés aux sommets du polygone P. Donc, enfin, les cosinus cherchés sont les cosinus des arcs qui, ayant le point A pour origine, sont terminés aux sommets du polygone régulier P. Ils sont au nombre de m.

Si m est pair, le polygone P a ses sommets deux à deux symétriques par rapport au centre du cercle; or, deux arcs terminés en des points diamétralement opposés ont leurs cosinus égaux et de signes contraires; donc, dans le cas où m est pair, les cosinus trouvés devront être deux à deux égaux et de signes contraires.

302. On peut arriver aux mêmes conclusions par la considération des formules des arcs qui correspondent à un cosinus donné. Soit α le plus petit arc positif qui correspond au cosinus donné; tous les arcs correspondant à ce même cosinus sont compris dans les deux formules

$$2k\pi + \alpha, \qquad 2k'\pi - \alpha,$$

où k et k' désignent des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Lors donc que l'on cherche $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$, on doit trouver les cosinus de tous les arcs compris dans les deux for-



mules

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}, \qquad \frac{2k'\pi-\alpha}{m};$$

or si on associe les arcs $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$, $\frac{2k'\pi-\alpha}{m}$ en faisant $k'=-k$, on obtient deux arcs égaux et de signes contraires, lesquels ont des cosinus égaux. Donc il suffit de considérer les cosinus des arcs compris dans la formule

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}.$$

Si l'on donne à k deux valeurs différant entre elles d'un multiple de m, on obtient deux arcs qui diffèrent d'un multiple de 2π, et qui, par conséquent, ont même cosinus. Donc il suffira de donner m valeurs entières consécutives à k, par exemple les m valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ldots \quad m-1.$$

Les cosinus cherchés sont ainsi les cosinus des m arcs

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi+\alpha}{m}, \quad \frac{4\pi+\alpha}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi+\alpha}{m}.$$

Si m est pair, ces cosinus sont deux à deux égaux et de signes contraires. En effet prenons dans cette suite deux arcs qui correspondent à deux valeurs de k différant entre elles de $\frac{m}{2}$; ces deux arcs

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}, \qquad \frac{2\left(k+\frac{m}{2}\right)\pi+\alpha}{m}=\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\pi,$$

diffèrent de π et ont des cosinus égaux et de signes contraires; donc les cosinus des $\frac{m}{2}$ premiers arcs de la suite sont égaux et de signes contraires aux cosinus des $\frac{m}{2}$ arcs suivants.

303. De cette double étude il résulte que, si le nombre donné λ est bien un cosinus, c'est-à-dire s'il est compris entre -1 et $+1$, l'équation algébrique

$$f(x)-\lambda=0$$

a ses m racines réelles, lesquelles sont des cosinus, et par conséquent sont comprises entre -1 et $+1$.

Ces m racines sont généralement distinctes. Nous allons chercher dans quels cas l'équation peut avoir des racines multiples.

304. **Cas des racines multiples.** Pour que deux des m arcs considérés $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$, $\frac{2k'\pi+\alpha}{m}$, aient même cosinus, il faut, puisque la différence de deux quelconques de ces m arcs est moindre que 2π, que leur somme soit un multiple de 2π, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{2k'\pi+\alpha}{m}=2h\pi,$$

ou

$$\alpha=(mh-k-k')\pi,$$

k, k', h, étant des nombres entiers. Donc α, le plus petit des arcs positifs qui correspondent au cosinus donné, doit être 0 ou π. Pour cela, il faut que le cosinus donné soit $+1$ ou -1.

Si cette condition est remplie, c'est-à-dire si λ est égal à $+1$, ou à -1, deux des sommets du polygone P sont symétriques par rapport à AA', et, comme le polygone est régulier, AA' est un axe de symétrie de ce polygone. Les sommets du polygone P, non situés sur AA', seront donc deux à deux symétriques par rapport à AA'.

305. *Premier cas.* Supposons d'abord $\lambda=1$. Les arcs dont on doit trouver les cosinus sont

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi}{m};$$

un de ces arcs étant nul, le polygone P a un sommet au point A. Selon que m est pair ou impair, le polygone P aura un second sommet, A', sur l'axe de symétrie AA', ou n'aura que le sommet A sur cet axe.

1° m **pair**. Le polygone P a un sommet en A et un sommet en A'; il est symétrique par rapport à AA', et, comme il est aussi symétrique par rapport au centre O du cercle, il en résulte qu'il est aussi symétrique par rapport à BB'. Cela étant, les cosinus des arcs, qui sont terminés aux sommets de ce polygone non situés sur AA', ou sur BB', sont deux à deux égaux et de même signe, et deux à deux égaux et de signes contraires. Aux arcs terminés aux sommets A et A' correspondent les cosinus $+1$ et -1, qui sont les racines simples de l'équation.

Si $\frac{m}{2}$ est pair, le polygone P a un sommet en B et un sommet en B', et aux arcs terminés en ces sommets correspond le cosinus 0,

qui est une racine double de l'équation. Si l'on débarrasse l'équation des racines simples $+1$ et -1, et de la racine double 0, en divisant son premier membre par $(x^2-1)x^2$, on obtient une équation de degré $m-4$, dont les racines sont deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires; en extrayant la racine carrée du premier membre de cette dernière équation, et en prenant x^2 pour inconnue, ou aura finalement à résoudre une équation de degré $\frac{m-4}{4}$.

Si $\frac{m}{2}$ est impair, le polygone P n'a pas de sommets sur BB', de sorte que, à part les racines $+1$ et -1, qui correspondent aux sommets A et A', les racines sont deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On abaissera d'abord l'équation au degré $m-2$, en divisant le premier membre par x^2-1, puis au degré $\frac{m-2}{4}$ en extrayant la racine carrée du premier membre de l'équation de degré $m-2$, et en prenant x^2 pour inconnue.

2° m **impair**. Le polygone P, qui a un sommet en A, n'a de sommet ni en A', ni en B, ni en B'. L'équation a une racine simple $+1$, et les autres racines sont deux à deux égales. On débarrassera l'équation de la racine simple $+1$, en divisant son premier membre par $x-1$, on extraira ensuite la racine carrée du premier membre, et on aura finalement à résoudre une équation de degré $\frac{m-1}{2}$.

306. *Second cas.* En second lieu, supposons $\lambda=-1$. Les arcs dont on doit trouver les cosinus sont les arcs

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(2k+1)\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Aucun de ces arcs n'est ou nul, ou égal à 2π. Le polygone P, qui est symétrique par rapport à AA', n'a donc pas de sommet en A. Pour que ce polygone ait un sommet en A', il faut et il suffit que l'on puisse donner à k une valeur telle que $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ soit égal à π, ou k égal à $\frac{m-1}{2}$, ce qui exige que m soit impair.

1° m **pair**. Le polygone P n'a aucun sommet sur AA'; il est symétrique à la fois par rapport à AA', et par rapport à BB'. Ce polygone aura deux sommets sur BB' si, parmi les arcs $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, il y

en a un égal à $\frac{\pi}{2}$; pour cela, il faut que $2k+1$ puisse être égal à $\frac{m}{2}$, c'est-à-dire que $\frac{m}{2}$ soit impair; dans le cas contraire, le polygone P n'aura pas de sommets sur BB'. Il y a donc lieu de subdiviser en deux le cas de m pair.

Si $\frac{m}{2}$ est impair, l'équation a deux racines nulles, et a les autres racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. En divisant par x^2 le premier membre de l'équation, en extrayant ensuite la racine carrée, puis en prenant x^2 pour inconnue, on abaissera finalement le degré de l'équation à résoudre au degré $\frac{m-2}{4}$.

Si $\frac{m}{2}$ est pair, l'équation n'a pas de racine nulle; ses racines sont deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On peut, en extrayant la racine carrée, et en prenant x^2 pour inconnue, abaisser le degré au degré $\frac{m}{4}$.

2° m **impair.** Un sommet du polygone P est en A', les autres sont deux à deux symétriques par rapport à AA', et aucun n'est sur BB'. L'équation admet la racine simple -1, et a ses autres racines deux à deux égales. On abaissera le degré de l'équation au degré $\frac{m-1}{2}$.

307. **Remarque.** Lorsque m est le produit de deux nombres entiers p et q, on peut ramener la recherche des valeurs de $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$ à la résolution de deux équations algébriques, l'une de degré p, l'autre de degré q. On posera $y=\cos\frac{a}{p}$, $x=\cos\frac{a}{pq}=\cos\frac{a}{m}$. On aura pour déterminer l'inconnue auxiliaire y une équation algébrique de la forme

$$\lambda=A_0 y^p+A_2 y^{p-2}+A_4 y^{p-4}+\ldots..$$

et à chaque valeur de y correspondront, pour x, q valeurs données par une équation de la forme

$$y=B_0 x^q+B_2 x^{q-2}+\ldots...$$

308. **Application**. *Calculer* $\cos\frac{a}{3}$, *connaissant* $\cos a$.

Si l'on pose $\cos a = \lambda$, et $\cos\frac{a}{3} = x$, l'équation à résoudre est

$$\lambda = x^3 - 3x(1 - x^2),$$

ou

$$F(x) = 4x^3 - 3x - \lambda = 0.$$

On peut vérifier algébriquement que, si λ est un nombre donné compris entre -1 et $+1$, l'équation a ses trois racines réelles et comprises entre -1 et $+1$. En effet, on a :

$$F'(x) = 3(4x^2 - 1) = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

si l'on substitue dans $F(x)$, à la place de x, les nombres $-1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1$, les résultats des substitutions sont indiqués dans le tableau suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$
$F(x)$	$-(1+\lambda)$	$1-\lambda$	$-(1+\lambda)$	$1-\lambda$

Si λ n'est égal ni à $+1$, ni à -1, les résultats sont alternativement négatifs et positifs, ce qui montre que l'équation a ses trois racines réelles et distinctes, une entre -1 et $-\frac{1}{2}$, une entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et une entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Si on a $\lambda = 1$, la plus grande racine est 1, les deux autres sont égales, et égales à $-\frac{1}{2}$.

Si on a $\lambda = -1$, la plus petite racine est -1, les deux autres sont égales, et égales à $+\frac{1}{2}$.

309. Soit α le plus petit arc positif correspondant au cosinus donné; les trois racines sont :

$$x_0 = \cos\frac{\alpha}{3}, \qquad x_1 = \cos\frac{2\pi + \alpha}{3}, \qquad x_2 = \cos\frac{4\pi + \alpha}{3}.$$

Si le cosinus donné λ n'est ni $+1$, ni -1, l'arc α n'est ni égal à 0, ni égal à π; les trois racines sont distinctes, et il est bon d'observer qu'elles sont rangées comme il suit, par ordre de grandeurs croissantes :

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

En effet, α étant compris entre o et π, on a les inégalités

$$0 < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{3}$$
$$\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi+\alpha}{3} < \pi$$
$$\frac{4\pi}{3} < \frac{4\pi+\alpha}{3} < \frac{5\pi}{3}.$$

Soient C, D, E, F, les extrémités des arcs, d'origine A, égaux à $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ (*fig.* 96). L'extrémité N_0 de l'arc $\frac{\alpha}{3}$ est sur l'arc AC; l'extrémité N_1 de l'arc $\frac{2\pi+\alpha}{3}$ est sur l'arc DA'; l'extrémité N_2 de l'arc $\frac{4\pi+\alpha}{3}$ est sur l'arc EB'F. Comme d'ailleurs $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; on a les inégalités

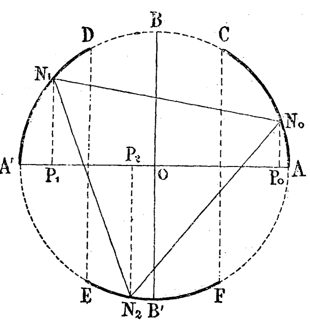


Fig. 96.

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1$$
$$-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2}$$

d'où enfin les inégalités

$$-1 < x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2} < x_0 < 1,$$

qui montrent que les trois racines x_1, x_2, x_0, sont rangées par ordre de grandeurs croissantes ; elles font en outre connaître trois intervalles tels que chacun comprend une des trois racines, et une seule.

Pour que l'équation n'ait pas ses trois racines distinctes, il faut que l'on ait ou $x_1 = x_2$, ou $x_2 = x_0$, et pour qu'il en soit ainsi, il faut que le sommet N_0 du triangle équilatéral $N_0N_1N_2$, qui ne peut se mouvoir que sur l'arc AC, occupe une des extrémités A ou C de cet arc. Dans le premier cas, les sommets N_0, N_1, N_2, du triangle sont

aux points A, D, E; le cosinus donné est $+1$, et les racines sont

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad x_0 = 1.$$

Dans le second cas, les sommets du triangle sont aux points C, A′, F; le cosinus donné est -1, et les racines de l'équation sont :

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = x_0 = \frac{1}{2}.$$

310. **Problème II.** *Étant donné* $\cos a$, *calculer* $\sin \frac{a}{m}$.

Reprenons la formule

$$\cos a = \cos^m \frac{a}{m} - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} \frac{a}{m} \sin^2 \frac{a}{m} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} \frac{a}{m} \sin^4 \frac{a}{m} - \ldots$$

Soit $\cos a = \lambda$; posons $\sin \frac{a}{m} = x$, et remplaçons $\cos \frac{a}{m}$ par $\pm\sqrt{1-x^2}$.

Si m est pair, le second membre ne renfermant $\cos \frac{a}{m}$ et $\sin \frac{a}{m}$ qu'à des puissances paires, l'équation ainsi obtenue est une équation algébrique du m^{me} degré, qui ne contient que des puissances paires de x. Elle admet m racines, deux à deux égales et de signes contraires.

Si m est impair, le second membre de l'équation obtenue est le produit de $\pm\sqrt{1-x^2}$ par un polynôme entier en x de degré $m-1$, qui ne renferme que des puissances paires de x. En élevant les deux membres au carré, on obtient une équation algébrique de degré $2m$, qui ne renferme que des puissances paires de x; cette équation admet $2m$ racines, deux à deux égales et de signes contraires.

311. Il est facile d'expliquer, à priori, pourquoi l'on trouve m, ou $2m$ valeurs, selon que m est pair ou impair, et pourquoi ces valeurs sont deux à deux égales et de signes contraires. En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, et la même figure, on sait que l'on doit obtenir les sinus des arcs compris dans les formules

$$\frac{2k\pi + a}{m}, \qquad \frac{2k'\pi - a}{m},$$

et que ces arcs, si on les compte à partir du point A pris pour origine, sont terminés aux sommets de deux polygones réguliers de m côtés, P et P′, symétriques l'un de l'autre par rapport à AA′.

Si m est pair, chacun de ces polygones est symétrique par rapport



au centre du cercle; comme l'un des polygones est symétrique à l'autre par rapport à AA', il en résulte que l'un des polygones est aussi symétrique à l'autre par rapport à BB'. Cela étant, les arcs terminés aux sommets de l'un des polygones ont les mêmes sinus que les arcs terminés aux sommets de l'autre. Il n'y a donc à considérer que les arcs limités aux sommets de l'un des deux polygones, P par exemple, ce qui explique pourquoi le problème admet m solutions. Enfin, les sommets du polygone P étant deux à deux symétriques par rapport au centre du cercle, les sinus des arcs terminés à ces sommets sont deux à deux égaux et de signes contraires.

Si m est impair, les polygones P et P' n'étant pas symétriques par rapport à BB', les sinus des arcs terminés aux sommets de l'un des polygones sont différents des sinus des arcs terminés aux sommets de l'autre, ce qui explique pourquoi le problème admet $2m$ solutions. D'ailleurs, les polygones P et P' étant symétriques l'un de l'autre par rapport à AA', les sinus des arcs terminés aux sommets de l'un sont égaux et de signes contraires aux sinus des arcs terminés aux sommets de l'autre.

312. De cette étude, il résulte que si le nombre donné λ est bien un cosinus, c'est-à-dire s'il est compris entre -1 et $+1$, l'équation algébrique, de degré m ou de degré $2m$, selon que m est pair ou impair, à laquelle on est conduit en cherchant $\sin\frac{a}{m}$ en fonction de $\cos a$, a toutes ses racines réelles; comme d'ailleurs ces racines sont des sinus, elles sont toutes comprises entre -1 et $+1$.

Ces racines sont généralement distinctes; nous allons chercher dans quels cas il en est autrement.

313. **Cas des racines multiples.** Nous examinerons séparément le cas où m est pair et le cas où m est impair.

1° m **pair.** Les seuls arcs à considérer sont les m arcs compris dans la formule

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m},$$

quand on y donne à k les m valeurs entières $0, 1, 2, \ldots m-1$.

Pour que deux de ces arcs, $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$ et $\frac{2k'\pi+\alpha}{m}$ par exemple, aient le même sinus, il faut, puisque leur différence est inférieure à 2π, que leur somme soit un multiple impair de π, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{2k'\pi+\alpha}{m}=(2h+1)\pi,$$



h étant entier, d'où

$$2\alpha = \left[(2h+1)m - 2k - 2k'\right]\pi;$$

et, puisque m est pair, α doit être un multiple de π. Donc le cosinus donné λ doit être égal à $+1$ ou à -1.

Si cette condition est remplie, deux des sommets du polygone P sont symétriques par rapport à BB', et comme ce polygone est régulier, la droite BB' est un axe de symétrie du polygone. D'autre part, m étant pair, le polygone P est symétrique par rapport au centre du cercle, et par suite AA' est aussi un axe de symétrie de ce polygone.

Soit d'abord $\lambda = 1$. Dans ce cas, $\alpha = 0$, et les arcs à considérer sont :

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

L'axe de symétrie AA' contient deux sommets du polygone P; l'axe de symétrie BB' contient deux sommets ou n'en contient pas selon que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.

Si $\frac{m}{2}$ est pair, on connaît quatre racines de l'équation, savoir : une racine double égale à 0, et deux racines simples $+1$ et -1, racines qui correspondent aux sinus des arcs terminés aux sommets A, A', B, B', du polygone. En divisant le premier membre de l'équation par $x^2(x^2-1)$, on obtient une nouvelle équation de degré $m-4$ qui a ses racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires ; en extrayant la racine carrée, et en prenant x^2 pour inconnue, on aura finalement à résoudre une équation de degré $\frac{m-4}{4}$.

Si $\frac{m}{2}$ est impair, le polygone P n'ayant pas de sommet sur BB', l'équation n'a pas de racine simple. Comme elle admet une racine double égale à 0, on abaissera son degré à $m-2$, en divisant son premier membre par x^2 ; cela fait, l'équation obtenue aura ses racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires ; on pourra donc abaisser son degré au degré $\frac{m-2}{4}$.

En second lieu supposons $\lambda = -1$. Dans ce cas, $\alpha = \pi$, les arcs à considérer sont :

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{5\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Le polygone P n'a pas de sommet sur l'axe de symétrie AA' ; pour



qu'il ait des sommets sur l'axe de symétrie BB', il faut que l'un des arcs considérés, $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, puisse être égal à $\frac{\pi}{2}$, ce qui exige que $\frac{m}{2}$ soit impair.

Si $\frac{m}{2}$ est pair, l'équation n'a ni racine simple, ni racine nulle ; ses racines sont deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires ; on abaisse le degré de l'équation au degré $\frac{m}{4}$.

Si $\frac{m}{2}$ est impair, l'équation admet les deux racines simples $+1$ et -1 ; on divise le premier membre par x^2-1, et on obtient une équation de degré $m-2$ qui a ses racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On abaisse finalement le degré de l'équation au degré $\frac{m-2}{4}$.

314. 2° m **impair**. On a généralement à considérer les arcs terminés aux sommets des deux polygones P et P', parce que ces polygones ne sont pas symétriques l'un de l'autre par rapport à BB'. Voyons d'abord si ces deux polygones peuvent coïncider.

Pour que les deux polygones coïncident, il faut et il suffit que l'un des arcs $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$ soit égal à l'un des arcs $\frac{2k'\pi-\alpha}{m}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\alpha=(k'-k)\pi;$$

donc il faut que le cosinus donné soit égal à $+1$ ou à -1.

Si on a $\lambda=1$, les arcs dont on doit trouver les sinus sont

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Le polygone P a un sommet en A, et par conséquent est symétrique par rapport au diamètre AA' ; le polygone P' est confondu avec le polygone P. L'équation de degré $2m$ à laquelle on a été conduit a ses racines égales deux à deux ; on l'abaissera au degré m en extrayant la racine carrée du premier membre. L'équation de degré m ainsi obtenue n'a que des racines simples ; une de ces racines est zéro ; les autres sont deux à deux égales et de signes contraires. On abaissera donc finalement le degré de l'équation à résoudre au degré $\frac{m-1}{2}$.



Si on a $\lambda = -1$, les arcs dont on doit trouver les sinus sont

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{5\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{m\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(2m-1)\pi}{m},$$

parmi lesquels se trouve l'arc $\frac{m\pi}{m}$, ou π. Le polygone P a un sommet en A', et est symétrique par rapport à AA'; le polygone P' se confond avec le polygone P. En opérant comme dans le cas précédent, on abaissera à $\frac{m-1}{2}$ le degré de l'équation à résoudre.

Si $\cos a$ n'est égal ni à $+1$, ni à -1, les polygones P et P' sont distincts; P' est symétrique de P par rapport à AA', et n'est pas symétrique de P par rapport à BB'. Les racines sont toutes des racines simples, à moins que le polygone P ne soit symétrique par rapport à BB', auquel cas, P', symétrique de P par rapport à AA', sera aussi symétrique par rapport à BB'. Cherchons la condition pour que le polygone P soit symétrique par rapport à BB'. Pour que deux sommets N_k, $N'_{k'}$, de ce polygone soient symétriques par rapport à BB', il faut que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{2k'\pi+\alpha}{m}=(2h+1)\pi,$$

h étant entier, d'où

$$\alpha=\Big((2h+1)m-2k-2k'\Big)\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire que α doit être un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, ou, mieux encore, puisque α est compris entre 0 et π, α doit être égal à $\frac{\pi}{2}$. Il faut donc que l'on ait : $\lambda = \cos a = 0$.

Si cette condition est remplie, le polygone P a deux de ses sommets symétriques par rapport à BB', et, comme il est régulier, BB' est un axe de symétrie de ce polygone. Le nombre des sommets étant impair, un des sommets est nécessairement sur l'axe de symétrie BB' du polygone, soit en B, soit en B'.

Le polygone P' étant symétrique du polygone P par rapport à AA', est, comme le polygone P, symétrique par rapport à BB', et a aussi un de ses sommets sur BB'; si P a un sommet en B, P' a un sommet en B', et réciproquement.

Il suit de là que l'équation admet les racines simples $+1$ et -1, et a ses autres racines deux à deux égales, et deux à deux égales

et de signes contraires. En divisant par $x^2 - 1$ le premier membre de l'équation de degré $2m$, en extrayant la racine carrée du premier membre de la nouvelle équation, et en prenant x^2 pour inconnue, on aura finalement à résoudre une équation de degré $\frac{2m-2}{4}$, ou $\frac{m-1}{2}$.

315. **Problème III.** *Étant donné* $\sin a$, *calculer* $\sin \frac{a}{m}$.

En remplaçant dans la formule

$$\sin ma = \frac{m}{1} \cos^{m-1} a . \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a . \sin^3 a + \ldots..$$

a par $\frac{a}{m}$, on obtient la relation

$$\sin a = \frac{m}{1} \cos^{m-1} \frac{a}{m} . \sin \frac{a}{m} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} \frac{a}{m} \cdot \sin^3 \frac{a}{m} + \ldots..$$

Le second membre est une fonction entière du m^{me} degré de $\cos \frac{a}{m}$ et de $\sin \frac{a}{m}$, dans laquelle $\sin \frac{a}{m}$ ne figure que par des puissances impaires, et $\cos \frac{a}{m}$ que par des puissances de même parité que $m - 1$.

Si m est impair, le second membre ne renferme que des puissances paires de $\cos \frac{a}{m}$. Soit $\sin a = \lambda$; posons $\sin \frac{a}{m} = x$, et remplaçons $\cos^2 \frac{a}{m}$ par $1 - x^2$, nous obtiendrons, pour déterminer x, une équation algébrique du m^{me} degré qui ne renferme que des puissances impaires de x.

Si m est pair, le second membre ne renferme que des puissances impaires de $\cos \frac{a}{m}$; si, posant toujours $x = \sin \frac{a}{m}$, on remplace $\cos \frac{a}{m}$ par $\pm \sqrt{1 - x^2}$, le second membre est le produit de $\pm \sqrt{1 - x^2}$ par une fonction entière de x, de degré $m - 1$, qui ne renferme que des puissances impaires de x. En élevant les deux membres au carré, on obtient une équation algébrique, de degré $2m$, qui ne renferme que des puissances paires de x.

316. Le problème conduit donc à une équation de degré m, ou de degré $2m$, selon que m est impair ou pair, et dans le second cas,

l'équation de degré $2m$ a ses racines deux à deux égales et de signes contraires. Il est facile d'expliquer pourquoi il en est ainsi.

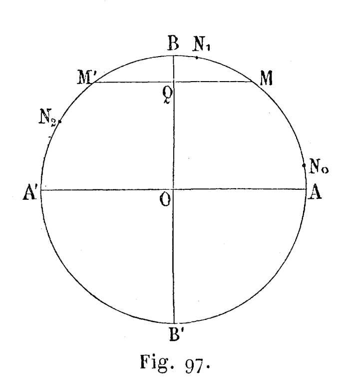


Fig. 97.

Considérons le cercle trigonométrique (*fig.* 97), et portons sur le diamètre BB', à partir du point O, dans le sens convenable selon le signe de $\sin a$, une longueur OQ égale à la valeur absolue de $\sin a$, et par le point Q menons la perpendiculaire à BB'; soient M et M' les points où cette perpendiculaire rencontre le cercle, M étant celui de ces deux points qui, par rapport à BB', est situé du même côté que le point A. L'arc a n'est pas déterminé; c'est l'un quelconque des arcs, d'origine A, terminés soit en M, soit en M'. Quand on cherche $\sin \frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$, on doit trouver les sinus des m^{es} parties de tous les arcs, d'origine A, terminés, soit en M, soit en M'. Parmi les arcs d'origine A, terminés en M, il y en a un et un seul compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; soit α cet arc; et soit N_0 l'extrémité d'un arc d'origine A, égal à $\frac{\alpha}{m}$. Les arcs d'origine A, égaux aux m^{es} parties des arcs terminés en M, auront pour extrémités les sommets $N_0, N_1, N_2, \ldots\ldots N_{m-1}$, d'un polygone régulier P de m côtés, inscrit dans le cercle, et ayant un sommet au point N_0.

Parmi les arcs terminés en M', il y a l'arc $\pi - \alpha$; soit N'_0 l'extrémité d'un arc, d'origine A, égal à $\frac{\pi-\alpha}{m}$. Les arcs, d'origine A, égaux aux m^{es} parties des arcs qui ont A pour origine et sont terminés en M', auront pour extrémités les sommets $N'_0, N'_1, N'_2, N'_3, \ldots\ldots N'_{m-1}$, d'un polygone régulier P' de m côtés, inscrit dans le cercle et ayant un sommet au point N'_0.

Les arcs terminés aux sommet sud polygone P sont :

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi+\alpha}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2k\pi+\alpha}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi+\alpha}{m},$$

et les arcs terminés aux sommets du polygone P' sont :

$$\frac{\pi-\alpha}{m}, \quad \frac{3\pi-\alpha}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m} \quad \ldots\ldots \quad \frac{(2m-1)\pi-\alpha}{m}.$$

Il y a lieu de distinguer deux cas, selon que m est impair ou pair.

317. *Premier cas*, m **impair**. Les deux polygones P et P′ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à BB′. En effet, prenons le sommet N_0 du polygone P, et cherchons la condition pour qu'un sommet $N'_{k'}$ du polygone P′ soit symétrique de N_0 par rapport à BB′. Les arcs terminés aux sommets N_0, $N'_{k'}$ étant $\frac{\alpha}{m}$ et $\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}$, la condition est :

$$\frac{\alpha}{m}+\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}=\pi,$$

ou

$$2k'+1=m,$$

ou

$$k'=\frac{m-1}{2};$$

$\frac{m-1}{2}$ est un nombre entier et les sommets N_0 et $N'_{\frac{m-1}{2}}$ sont symétriques par rapport à BB′. Il en résulte que le polygone P′ est symétrique du polygone P par rapport à BB′, et, par suite, que les sinus des arcs terminés aux sommets du polygone P′ sont respectivement égaux aux sinus des arcs terminés aux sommets du polygone P. On doit donc trouver, pour $\sin\frac{a}{m}$, en fonction de $\sin a$, m valeurs quand m est impair.

318. Ces m valeurs sont généralement distinctes ; pour qu'il en soit autrement, il faut que deux des sommets, N_k, $N_{k'}$ par exemple, du polygone P soient symétriques par rapport à BB′ ; et pour cela, il faut que la somme des arcs $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$, $\frac{2k'\pi+\alpha}{m}$, terminés en ces sommets, soit un multiple impair de π. Il faut donc que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{2k'\pi+\alpha}{m}=(2h+1)\pi,$$

h étant entier, ou

$$\alpha=\left[m(2h+1)-2k-2k'\right]\frac{\pi}{2};$$

et, comme m est supposé impair, on voit que la condition est que α soit un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Il faut donc que le sinus donné, λ, soit égal à $+1$, ou à -1.

Si cette condition est remplie, deux des sommets du polygone P sont symétriques par rapport à BB′, et, comme le polygone est régulier, BB′ est un axe de symétrie de ce polygone. Le nombre des sommets étant impair, un des sommets est nécessairement sur l'axe de symétrie du polygone, soit en B, soit en B′ ; c'est d'ailleurs ce que nous allons vérifier avec les formules.

Supposons d'abord $\lambda = 1$. Dans ce cas, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et les arcs dont on doit trouver les sinus sont :

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{m}, \quad \frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{m}, \quad \frac{4\pi + \frac{\pi}{2}}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi + \frac{\pi}{2}}{m}.$$

Parmi ces arcs il y en a un égal à $\frac{\pi}{2}$, ou un égal à $\frac{3\pi}{2}$. En effet, pour que l'arc $\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{m}$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$, il faut :

$$k = \frac{m-1}{4};$$

pour que l'arc $\frac{2k'\pi + \frac{\pi}{2}}{m}$ soit égal à $\frac{3\pi}{2}$, il faut :

$$k' = \frac{3m-1}{4} = m - \frac{m+1}{4};$$

or, m étant impair, un des deux nombres $m-1$, $m+1$, et un seul, est divisible par 4, car tout nombre impair est un multiple de 4, plus ou moins 1. Il suit de là que le polygone P a nécessairement un de ses sommets sur BB′, en B si m est un multiple de 4 plus 1, en B′ si m est un multiple de 4 moins 1. L'équation admet donc une racine simple égale à $+1$ ou à -1, et a ses autres racines deux à deux égales. On abaissera son degré au degré $\frac{m-1}{2}$.

En second lieu, soit $\lambda = -1$. Dans ce cas, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, et les arcs dont on doit trouver les sinus sont :

$$\frac{\frac{3\pi}{2}}{m}, \quad \frac{2\pi + \frac{3\pi}{2}}{m}, \quad \frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi + \frac{3\pi}{2}}{m}.$$

Parmi ces arcs, il y en a encore un égal à $\frac{\pi}{2}$, ou un égal à $\frac{3\pi}{2}$.

Pour que l'arc $\dfrac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{m}$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$, il faut :

$$k=\frac{m-3}{4}=\frac{m+1}{4}-1;$$

pour que l'arc $\dfrac{2k'\pi+\frac{3\pi}{2}}{m}$ soit égal à $\frac{3\pi}{2}$, il faut :

$$k'=\frac{3m-3}{4}=3\,\frac{m-1}{4}.$$

Or, un des nombres $m+1$, $m-1$, et un seul, étant divisible par 4, le polygone P a toujours un sommet sur BB′ ; ce sommet est en B si m est un multiple de 4 moins 1, il est en B′ si m est un multiple de 4 plus 1.

L'équation admet une racine simple, $+1$, ou -1, et a ses autres racines deux à deux égales ; on abaissera encore son degré au degré $\frac{m-1}{2}$.

319. *Second cas,* m **pair**. Quand m est pair, les polygones P et P′ n'étant pas symétriques l'un de l'autre par rapport à BB′, on doit trouver $2m$ valeurs pour $\sin\frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$. Chacun des polygones ayant ses sommets symétriques deux à deux par rapport au centre du cercle, les m sinus des arcs terminés aux sommets de l'un quelconque de ces polygones sont deux à deux égaux et de signes contraires. Voilà pourquoi, dans ce cas, l'équation trouvée est de degré $2m$, et ne renferme que des puissances paires de l'inconnue.

Cette équation de degré $2m$ ne renferme le sinus donné, $\sin a$, que par son carré ; de sorte que les racines de l'équation ne changent pas quand on change $\sin a$ en $-\sin a$. Il est facile de comprendre pourquoi il en doit être ainsi. Quand on remplace $\sin a$ par $-\sin a$, on remplace les points que nous avons appelés M et M′ par d'autres M_1, M'_1, symétriques de ceux-ci par rapport à AA′, et, par suite, les polygones P et P′ par d'autres P_1 et P'_1 symétriques de ceux-ci par rapport à AA′. Chacun des polygones réguliers P et P_1 est symétrique par rapport au centre du cercle ; les polygones P et P_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à AA′ ; donc ces polygones P et P_1 sont aussi symétriques l'un de l'autre par rapport à BB′. Il

en est de même des polygones P′ et P'_1, et les arcs limités aux sommets des polygones P_1 et P'_1 ont les mêmes sinus que les arcs limités aux sommets des polygones P et P′.

320. Les $2m$ valeurs de $\sin\frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$ sont généralement distinctes; pour qu'il en soit autrement, il faut ou que les deux polygones P et P′ aient un sommet commun, et par suite se confondent, ou que l'un d'eux ait au moins deux sommets symétriques par rapport à BB′.

Cherchons d'abord la condition pour qu'un sommet N_k du polygone P se confonde avec un sommt $N'_{k'}$ du polygone P′: il faut pour cela que la différence des arcs terminés en ces sommets soit un multiple pair de π, ou que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}-\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}=2h\pi,$$

h étant entier, ou

$$\alpha=\left(2mh-2k+2k'+1\right)\frac{\pi}{2};$$

il faut que α soit un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, que le sinus donné λ soit $+1$, ou -1. D'ailleurs, si cette condition est remplie, les polygones réguliers P et P′, de m côtés, ont un sommet commun, et par suite coïncident.

Soit d'abord $\lambda=1$, on a $\alpha=\frac{\pi}{2}$, et les arcs dont on doit trouver les sinus sont :

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{m},\quad \frac{2\pi+\frac{\pi}{2}}{m},\quad \frac{4\pi+\frac{\pi}{2}}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{2(m-1)\pi+\frac{\pi}{2}}{m}$$

ou encore

$$\frac{\pi}{2m},\quad \frac{5\pi}{2m},\quad \frac{9\pi}{2m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(4m-3)\pi}{2m}.$$

On vérifie aisément qu'aucun de ces arcs ne peut être ni multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, ni multiple de π; ce qui prouve que le polygone P n'a de sommet ni sur BB′, ni sur AA′. On vérifie aussi que deux des sommets du polygone P ne peuvent être symétriques par rapport à BB′, de sorte que les sinus des m arcs terminés aux sommets de ce polygone sont distincts; ils sont deux à deux égaux et de signes

contraires. L'équation du degré $2m$ a donc ses racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires : on peut l'abaisser au degré $\frac{m}{2}$.

En second lieu, soit $\lambda = -1$, on a $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; les arcs dont on doit trouver les sinus sont :

$$\frac{3\pi}{2m}, \quad \frac{7\pi}{2m}, \quad \frac{11\pi}{2m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(4m-1)\pi}{2m};$$

ils ne comprennent ni multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, ni multiples de π, ni couples d'arcs dont la somme est un multiple impair de π. Comme dans le cas précédent, l'équation de degré $2m$ a ses racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires, on l'abaisse au degré $\frac{m}{2}$.

Si le sinus donné λ n'est ni $+1$, ni -1, les polygones P et P' sont distincts. Cherchons si deux sommets N_k, $N_{k'}$ du polygone P peuvent être symétriques par rapport à BB'. Il faut, pour qu'il en soit ainsi,

$$\frac{2k\pi + \alpha}{m} + \frac{2k'\pi + \alpha}{m} = (2h+1)\pi,$$

h étant entier, ou

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[m(2h+1) - 2k - 2k'\right]\pi,$$

et, comme m est pair, α doit être un multiple de π. Donc il faut que le sinus donné λ soit égal à o.

On verrait de même que la condition pour que deux des sommets du polygone P' soient symétriques par rapport à BB' est encore que le sinus donné λ soit égal à o.

Supposons donc $\lambda = 0$; alors $\alpha = 0$. Les arcs terminés aux sommets du polygone P sont :

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2(m-1)\pi}{m};$$

et les arcs terminés aux sommets du polygone P' sont :

$$\frac{\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{5\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Parmi les arcs de la première suite se trouvent les arcs o et π;

donc le polygone P a un sommet en A, un sommet en A′, et est ainsi symétrique à la fois par rapport à AA′ et par rapport à BB′. Ce polygone a deux sommets sur BB′, ou n'en a pas, selon que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.

Parmi les arcs de la seconde suite, deux arcs équidistants des extrêmes ont leur somme égale à 2π, donc les sommets du polygone P′ sont deux à deux symétriques par rapport à AA′; comme d'ailleurs le polygone P′ est symétrique par rapport au centre du cercle, il est aussi symétrique par rapport à BB′. Il a d'ailleurs deux sommets sur BB′, ou n'en a pas, selon que $\frac{m}{2}$ est impair ou pair.

Il suit de là que, dans tous les cas, les $2m$ points du cercle qui sont les extrémités des arcs dont on doit trouver les sinus, sont les quatre points A, A′, B, B′, et $2m-4$ points deux à deux symétriques par rapport à AA′, et deux à deux symétriques par rapport à BB′. L'équation admettra donc la racine double 0, les deux racines simples $+1$ et -1, et aura ses autres racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On abaissera son degré au degré $\frac{2m-4}{4}$, ou $\frac{m-2}{2}$.

321. **Application**. *Calculer* $\sin\frac{a}{3}$, *en fonction de* $\sin a$.

Si l'on pose $\sin a = \lambda$ et $\sin\frac{a}{3} = x$, l'équation à résoudre est

$$\lambda = 3(1-x^2)x - x^3,$$

ou

$$F(x) = 4x^3 - 3x + \lambda = 0.$$

On peut vérifier algébriquement que, si λ est un nombre donné compris entre -1 et $+1$, l'équation a ses trois racines réelles et comprises entre -1 et $+1$. On a en effet :

$$F'(x) = 12x^2 - 3 = 12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

et si l'on substitue dans F(x) les nombres $-1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$, et $+1$, les résultats des substitutions sont ceux qu'indique le tableau suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$
$F(x)$	$-1+\lambda$	$1+\lambda$	$-1+\lambda$	$1+\lambda$

Si λ n'est égal ni à $+1$, ni à -1, ces résultats sont alternativement négatifs et positifs, ce qui prouve que les trois racines sont réelles, distinctes, et comprises, une entre -1 et $-\frac{1}{2}$, une entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, une entre $+\frac{1}{2}$ et $+1$. Si $\lambda = +1$, deux des racines sont égales à $+\frac{1}{2}$, la troisième est égale à -1. Si $\lambda = -1$, une des racines est $+1$, les deux autres sont égales à $-\frac{1}{2}$. Dans le premier cas, le triangle $N_0N_1N_2$ a un sommet en B′ et un côté perpendiculaire sur BB′, au milieu de OB; dans le second cas, ce triangle a un sommet en B et un de ses côtés perpendiculaire sur BB′, au milieu de OB′.

322. Si l'on désigne par α l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ qui correspond à une valeur donnée quelconque de λ, les trois racines de l'équation sont :

$$x_0 = \sin\frac{\alpha}{3}, \qquad x_1 = \sin\frac{2\pi+\alpha}{3}, \qquad x_2 = \sin\frac{4\pi+\alpha}{3}.$$

Il est bon d'observer que ces racines sont toujours rangées comme il suit par ordre de grandeurs croissantes :

$$x_2 < x_0 < x_1.$$

En effet, α étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on a les inégalités suivantes :

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{\alpha}{3} < \frac{\pi}{6}$$
$$\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi+\alpha}{3} < \frac{5\pi}{6}$$
$$\frac{7\pi}{6} < \frac{4\pi+\alpha}{3} < \frac{3\pi}{2}.$$

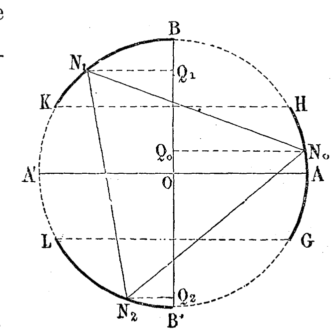


Fig. 98.

Soient G, H, K, L, les extrémités des arcs, d'origine A, égaux à $-\frac{\pi}{6}$, $+\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, (*fig.* 98).

L'extrémité N_0 de l'arc $\frac{\alpha}{3}$ est sur l'arc GAH; l'extrémité N_1 de l'arc

$\frac{2\pi+\alpha}{3}$ est sur l'arc BK; l'extrémité N_2 de l'arc $\frac{4\pi+\alpha}{3}$ est sur l'arc LB'. Comme on a d'ailleurs :

$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}, \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2},$$

on en déduit les inégalités

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &< x_0 < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &< x_1 < 1 \\ -1 &< x_2 < -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

d'où enfin les inégalités

$$-1 < x_2 < -\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1}{2} < x_1 < 1$$

qui montrent que les trois racines x_2, x_0, x_1, sont rangées par ordre de grandeurs croissantes. Ces inégalités font en outre connaître trois intervalles tels que chacun comprend une des trois racines, et une seule.

Pour que les trois racines ne soient pas distinctes, il faut ou $x_2=x_0$, ou $x_0=x_1$, et pour qu'il en soit ainsi, il faut que le sommet N_0 du triangle équilatéral $N_0N_1N_2$, qui ne peut se mouvoir que sur l'arc GAH, occupe une des extrémités G ou H de cet arc. Dans le premier cas, $\frac{\alpha}{3}=-\frac{\pi}{6}$, d'où $\alpha=-\frac{\pi}{2}$; le sinus donné λ est -1; les sommets N_0, N_1, N_2, du triangle équilatéral sont aux points G, B, L; les racines sont $x_2=x_0=-\frac{1}{2}$ et $x_1=+1$. Dans le second cas, $\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{6}$, d'où $\alpha=\frac{\pi}{2}$; le sinus donné λ est égal à $+1$; les sommets N_0, N_1, N_2, du triangle équilatéral sont aux points H, K, B'; les racines sont $x_2=-1$, $x_1=x_0=+\frac{1}{2}$.

323. **Problème IV.** *Étant donné* $\sin a$, *calculer* $\cos\frac{a}{m}$.

Si dans l'équation

$$\sin a=\frac{m}{1}\cos^{m-1}\frac{a}{m}\sin\frac{a}{m}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\frac{a}{m}\sin^3\frac{a}{m}+\ldots\ldots$$

on remplace $\cos\frac{a}{m}$ par x, et $\sin\frac{a}{m}$ par $\pm\sqrt{1-x^2}$, le second membre devient le produit de $\pm\sqrt{1-x^2}$ par une fonction entière de x, de degré $m-1$, qui ne renferme x qu'à des puissances de même parité que $m-1$. En élevant les deux membres au carré, on obtient, pour déterminer x, une équation algébrique de degré $2m$, laquelle ne renferme que des puissances paires de l'inconnue. On a donc, pour $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$, $2m$ valeurs deux à deux égales et de signes contraires.

324. Il est facile d'expliquer pourquoi il en est ainsi. En conservant les mêmes notations et la même figure que dans le problème précédent, on voit que les cosinus cherchés sont les cosinus des arcs terminés aux sommets des deux polygones réguliers de m côtés que nous avons appelés P et P'.

Si m est impair, nous avons montré que le polygone P' est symétrique du polygone P par rapport à BB'; il en résulte que les cosinus des arcs terminés aux sommets du polygone P' sont égaux et de signes contraires aux cosinus des arcs terminés aux sommets du polygone P.

Si m est pair, les sommets de chacun des polygones P et P' sont deux à deux symétriques par rapport au centre du cercle, et, pour cette raison, les cosinus des arcs terminés aux sommets de l'un quelconque de ces polygones sont deux à deux égaux et de signes contraires. Cela explique pourquoi, dans les deux cas, on trouve, pour $\cos\frac{a}{m}$, $2m$ valeurs, deux à deux égales et de signes contraires.

Remarquons que, dans l'équation de degré $2m$ qui donne les valeurs de $\cos\frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$, le nombre donné, $\sin a$, ne figure que par son carré, et que, par suite, les racines de l'équation ne changent pas quand on change $\sin a$ en $-\sin a$. Il est facile d'expliquer pourquoi il en doit être ainsi. Si l'on change $\sin a$ en $-\sin a$, les points que nous avons appelés M et M' sont remplacés par des points M_1, M'_1, symétriques de ceux-ci par rapport à AA', et, par suite, les deux polygones P et P' sont remplacés par d'autres polygones P_1, P'_1 symétriques des précédents par rapport à AA'. Les arcs limités aux sommets de ces seconds polygones ont les mêmes cosinus que les arcs limités aux sommets des premiers.

325. **Cas des racines multiples.** Les $2m$ racines de l'équation de degré $2m$ obtenue en cherchant les valeurs de $\cos\frac{a}{m}$ en fonction

de $\sin a$ sont généralement distinctes. Cherchons dans quels cas il en peut être autrement.

Pour que ces racines ne soient pas toutes distinctes, il faut, ou que les deux polygones P et P′ aient un sommet commun, ou que deux sommets d'un même polygone soient symétriques par rapport à AA′. Pour qu'un sommet N_k du polygone P se confonde avec un sommet $N'_{k'}$ du polygone P′, il faut que la différence des arcs $\frac{2k\pi+\alpha}{m}$, $\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}$ soit un multiple pair de π, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}-\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}=2h\pi,$$

h étant entier, ou

$$\alpha=\left(2mh-2k+2k'+1\right)\frac{\pi}{2};$$

α doit être un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et, par conséquent, le sinus donné doit être $+1$ ou -1.

On sait que l'on obtient la même équation de degré $2m$ en faisant $\sin a=1$, ou $\sin a=-1$, et on a expliqué pourquoi il en doit être ainsi.

Supposons $\sin a=1$; alors $\alpha=\frac{\pi}{2}$; $\pi-\alpha$ est aussi égal à $\frac{\pi}{2}$, et les deux polygones P et P′ coïncident. Donc les racines de l'équation de degré $2m$ sont égales deux à deux, et le premier membre de cette équation est un carré; on extraira la racine carrée, et on abaissera ainsi à m le degré de l'équation. Les arcs dont les cosinus sont les racines de cette équation de degré m sont

$$\frac{\pi}{2m},\quad \frac{5\pi}{2m},\quad \frac{9\pi}{2m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(4k+1)\pi}{2m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(4m-3)\pi}{2m};$$

aucun de ces arcs n'est un multiple de π, et par suite le polygone P n'a aucun sommet sur AA′; mais si m est impair, l'un de ces arcs est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à $\frac{3\pi}{2}$, selon que m est de la forme $4p+1$ ou de la forme $4p-1$. Dans les deux cas, le polygone P a un sommet sur BB′, et par suite ce polygone est symétrique par rapport à BB′. Il en résulte que, si m est impair, l'équation de degré m admet une racine nulle et a ses autres racines deux à deux égales et de signes contraires; on peut donc abaisser son degré à $\frac{m-1}{2}$. Si m est pair, le polygone P n'a pas de sommet sur BB′. Dans ce cas le polygone

est symétrique par rapport au centre du cercle, et par conséquent les cosinus cherchés sont deux à deux égaux et de signes contraires; donc, on peut abaisser le degré de l'équation à résoudre à $\frac{m}{2}$.

Si $\sin a$ n'est égal ni à $+1$ ni à -1, les polygones P et P′ n'ont aucun sommet commun, et, pour que les racines de l'équation de degré $2m$ ne soient pas toutes distinctes, il faut, ou qu'un sommet du polygone P soit symétrique à un sommet du polygone P′ par rapport à AA′, ou que deux sommets de l'un de ces polygones soient symétriques par rapport à AA′.

Il est impossible qu'un sommet N_k du polygone P soit symétrique d'un sommet $N'_{k'}$ du polygone P′ par rapport à AA′; car il faudrait pour cela :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{(2k'+1)\pi-\alpha}{m}=2h\pi,$$

h étant entier, ou

$$2k+2k'+1=2mh,$$

ce qui est impossible, les nombres k, k', h devant être entiers.

Cherchons la condition pour que deux sommets N_k, $N_{k'}$ du polygone P soient symétriques par rapport à AA′; il faut :

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}+\frac{2k'\pi+\alpha}{m}=2h\pi,$$

h étant entier, ou

$$\alpha=(mh-k-k')\pi;$$

α doit être un multiple de π. Le sinus donné doit être nul.

On verrait de même que la condition pour que deux sommets du polygone P′ soient symétriques par rapport à AA′ est aussi que le sinus donné soit nul.

Cette condition remplie, chacun des polygones P et P′ a deux sommets symétriques par rapport à AA′, et, comme ces polygones sont réguliers, le diamètre AA′ est un axe de symétrie pour chacun d'eux.

Soit donc $\lambda=0$; alors $\alpha=0$, les arcs terminés aux sommets du polygone P sont :

$$0,\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{2k\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{2(m-1)\pi}{m};$$

et les arcs terminés aux sommets du polygone P′ sont :

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(2k+1)\pi}{m},\quad \ldots\ldots\quad \frac{(2m-1)\pi}{m}.$$

Nous distinguerons deux cas, selon que m est impair ou pair.

1° m **impair.** Le polygone P a un sommet en A, ce qui montre à nouveau que ce polygone est symétrique par rapport à AA'; il n'a pas de sommet en A', et par suite il n'a aucun sommet sur BB'. Le polygone P a un sommet en A', ce qui montre à nouveau qu'il est symétrique à lui-même par rapport à AA', et montre en outre qu'il est symétrique au polygone P par rapport à BB'. Il en résulte que l'équation de degré $2m$ admet les deux racines $+1$ et -1, et a ses autres racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On pourra donc abaisser son degré à $\frac{2m-2}{4}$, ou à $\frac{m-2}{2}$.

2° m **pair.** Chacun des polygones P et P' symétriques par rapport à AA' est symétrique par rapport au centre et par suite est aussi symétrique par rapport à BB'.

Le polygone P a un sommet en A et un sommet en A'. Il a un sommet en B, et par suite un sommet en B', si l'on peut poser :

$$\frac{2k\pi}{m}=\frac{\pi}{2},$$

ou

$$k=\frac{m}{2},$$

c'est-à-dire si $\frac{m}{2}$ est pair. Dans le cas contraire, le polygone P n'a pas de sommet sur BB'.

Le polygone P' n'a pas de sommet sur AA'; il a un sommet en B, et par suite un sommet en B', si l'on peut poser :

$$\frac{(2k+1)\pi}{m}=\frac{\pi}{2},$$

ou

$$2k+1=\frac{m}{2},$$

c'est-à-dire si $\frac{m}{2}$ est impair. Dans le cas contraire, le polygone P' n'a pas de sommet sur BB'.

En résumé, les points A et A' sont sommets du polygone P et ne sont pas sommets du polygone P', et les points B et B' sont sommets de l'un ou de l'autre des deux polygones suivant que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.

Il suit de là que, quand m est pair, l'équation de degré $2m$ qui donne

les valeurs de $\cos \frac{a}{m}$ en fonction de $\sin a$, a deux racines simples $+1$ et -1, une racine double égale à 0, et a ses autres racines deux à deux égales, et deux à deux égales et de signes contraires. On peut donc abaisser son degré à $\frac{2m-4}{4}$, ou à $\frac{m-2}{2}$.

326. **Problème V**. *Étant donné* tg$a$, *calculer* $\operatorname{tg} \frac{a}{m}$.

Dans la formule

$$\operatorname{tg} ma = \frac{\frac{m}{1} \operatorname{tg} a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{tg}^3 a + \ldots\ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{tg}^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \operatorname{tg}^4 a - \ldots\ldots}$$

remplaçons a par $\frac{a}{m}$; posons $\operatorname{tg} a = \lambda$, et $\operatorname{tg} \frac{a}{m} = x$; nous obtiendrons l'équation

$$\operatorname{tg} a = \lambda = \frac{mx - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots\ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} x^4 - \ldots\ldots}.$$

Pour abréger, posons

$$F(x) = mx - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} x^5 - \ldots,$$

$$f(x) = 1 - \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} x^4 - \ldots\ldots$$

$F(x)$ ne renferme que des puissances impaires de x, $f(x)$ ne renferme que des puissances paires. L'un de ces deux polynomes est du m^{me} degré, l'autre du degré $m-1$. Les valeurs de $\operatorname{tg} \frac{a}{m}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ sont les racines de l'équation algébrique du m^{me} degré

$$(1) \qquad \lambda f(x) - F(x) = 0.$$

327. Nous allons expliquer pourquoi l'on doit trouver m valeurs pour $\operatorname{tg} \frac{a}{m}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

Sur la tangente en A au cercle trigonométrique (*fig.* 99), à partir du point A, dans le sens convenable suivant le signe de $\operatorname{tg} a$, portons une longueur AT égale à la valeur absolue de $\operatorname{tg} a$, et menons le diamètre du cercle qui passe par T ; soient M, M′ les extrémités de ce

diamètre, M étant celle de ces deux extrémités qui, par rapport à AA', est du même côté que le point B.

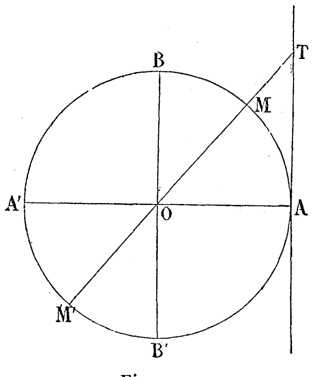


Fig. 99.

L'arc a n'est pas déterminé, c'est l'un quelconque des arcs, d'origine A, terminés soit en M, soit en M'. Quand on cherche $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, on doit trouver les tangentes des m^{es} parties de tous les arcs, d'origine A, terminés soit en M, soit en M'.

Parmi les arcs d'origine A terminés en M, il y a un arc, et un seul, compris entre o et π; soit α cet arc.

Parmi les arcs d'origine A terminés en M', il y a l'arc $\pi+\alpha$. Les arcs dont on doit trouver les tangentes sont donc compris dans les deux formules

$$\frac{2k\pi+\alpha}{m}, \qquad \frac{(2k+1)\pi+\alpha}{m},$$

ou simplement dans la formule unique

$$\frac{k\pi+\alpha}{m},$$

k désignant un nombre entier quelconque, pair ou impair, positif ou négatif.

Si l'on donne à k deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de m, on obtient deux arcs qui diffèrent d'un multiple de π, et qui, pour cette raison, ont une même tangente. Pour obtenir toutes les valeurs de $\operatorname{tg}\frac{k\pi+\alpha}{m}$, il suffira donc de donner à k les m valeurs entières consécutives

$$p, \quad p+1, \quad p+2, \quad \ldots\ldots \quad p+m-1,$$

la première p étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Les arcs dont on devra prendre les tangentes étant distincts, et étant tels que la différence de deux quelconques est moindre que π, les tangentes de ces arcs sont toutes distinctes.

On peut remarquer que si l'on prend le point A pour origine de ces arcs, et si l'on désigne par N_p l'extrémité de l'arc $\frac{p\pi+\alpha}{m}$, les ex-

trémités des m arcs considérés seront m sommets consécutifs d'un polygone régulier de $2m$ côtés inscrit dans le cercle considéré. Si l'on observe que m sommets consécutifs d'un polygone régulier de $2m$ côtés sont toujours situés sur une *demi-circonférence*, on reconnaît à nouveau que les tangentes des arcs terminés à ces m sommets sont toutes distinctes.

Si l'on pose :

$$x_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi + \alpha}{m},$$

les m racines de l'équation (1) sont :

$$x_p, \quad x_{p+1}, \quad x_{p+2}, \quad \ldots\ldots \quad x_{p+m-1},$$

p désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

328. **Remarque I.** *On peut toujours choisir le nombre* p *de telle façon que les racines*

$$x_p, \quad x_{p+1}, \quad x_{p+2}, \quad \ldots\ldots \quad x_{p+m-1},$$

soient rangées par ordre de grandeurs croissantes.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le premier des arcs considérés soit supérieur ou égal à $-\frac{\pi}{2}$, et que le dernier soit inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{p\pi + \alpha}{m} \geqslant -\frac{\pi}{2}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{(p+m-1)\pi + \alpha}{m} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

ou

$$p \geqslant -\frac{m}{2} - \frac{\alpha}{\pi}, \qquad \text{avec} \qquad p \leqslant -\frac{m}{2} + 1 - \frac{\alpha}{\pi},$$

ou encore les inégalités (A)

$$\text{(A)} \qquad -\frac{m}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \leqslant p \leqslant -\frac{m}{2} + 1 - \frac{\alpha}{\pi},$$

l'arc α étant, par hypothèse, compris entre 0 et π.

Quand m est pair, le seul nombre entier qui, mis à la place de p, vérifie les inégalités (A), est $-\frac{m}{2}$.

Quand m est impair, il y a avantage à mettre en évidence les nombres entiers $-\frac{m-1}{2}$ et $-\frac{m+1}{2}$ qui comprennent le nombre $-\frac{m}{2}$.

On met ainsi les inégalités (A) sous l'une des deux formes (B), (B') :

$$\text{(B)} \qquad -\frac{m-1}{2}-\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{\pi} \leqslant p \leqslant -\frac{m-1}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\pi};$$

$$\text{(B')} \qquad -\frac{m+1}{2}-\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}}{\pi} \leqslant p \leqslant -\frac{m+1}{2}+\frac{\frac{3\pi}{2}-\alpha}{\pi}.$$

Si λ est positif ou nul, on a $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$; par suite, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ est positif ou nul, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ est plus petit que π, et, en prenant les inégalités (A) sous la forme (B), on voit qu'il faut prendre p égal à $-\frac{m-1}{2}$.

Si λ est négatif, on a $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; par suite, $\alpha-\frac{\pi}{2}$ est positif, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ est plus petit que π, et, en prenant les inégalités (A) sous la forme (B'), on voit qu'il faut prendre p égal à $-\frac{m+1}{2}$.

Si λ est infini, on pourra prendre p égal à $-\frac{m-1}{2}$ ou à $-\frac{m+1}{2}$; dans le premier cas, le plus grand arc est $+\frac{\pi}{2}$; dans le second, le plus petit arc est $-\frac{\pi}{2}$, tous les autres sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

329. **Remarque II.** *Si l'on donne à λ deux valeurs différentes λ, λ', les équations* (1) et (2),

$$(1) \qquad \lambda f(x) - F(x) = 0$$

$$(2) \qquad \lambda' f(x) - F(x) = 0$$

sont telles qu'entre deux racines consécutives de l'équation (1) *il y a une et une seule racine de l'équation* (2), *et qu'en outre il y a une racine de l'équation* (2), *soit entre* $-\infty$ *et la plus petite racine de l'équation* (1), *soit entre la plus grande racine de l'équation* (1) *et* $+\infty$. On exprime ce fait plus rapidement en disant que les racines de l'une des deux équations séparent les racines de l'autre.

En effet, les racines de l'équation (1), rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs d'origine A, terminés à m sommets consécutifs, N_1, N_2, ... N_m, d'un polygone régulier de $2m$ côtés, ces m sommets étant tous situés sur le demi-cercle B'AB (*fig.* 100). Pareillement les racines de l'équation (2), rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs d'origine A, terminés à m sommets consécutifs, N'_1, N'_2, ... N'_m, d'un polygone

régulier de $2m$ côtés, ces m sommets étant tous situés sur le même demi-cercle B'AB. Comme les sommets N_{m+1}, N'_{m+1} diamétralement opposés aux sommets N_1, N'_1, sont sur le quart de cercle BA', le point N'_1 est nécessairement situé ou entre N_1 et N_2, ou entre B' et N_1.

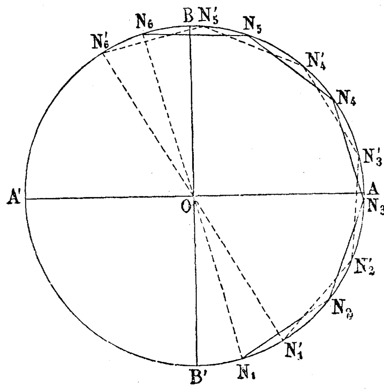


Fig. 100.

Dans le premier cas, N'_2 est entre N_2 et N_3, N'_3 entre N_3 et N_4, ... et N'_m entre N_m et B. On en conclut qu'entre deux racines consécutives quelconques de l'équation (1), il y a une racine de l'équation (2) et une seule, et qu'il y a une racine de l'équation (2), et une seule, entre la plus grande racine de l'équation (1) et $+\infty$.

Dans le second cas, N'_1 étant entre B' et N_1, N'_2 est entre N_1 et N_2, N'_3 est entre N_2 et N_3, ... N'_m est entre N_{m-1} et N_m. On en conclut qu'il y a une racine de l'équation (2), et une seule, entre $-\infty$ et la plus petite racine de l'équation (1), et qu'il y a une racine de l'équation (2), et une seule, entre deux racines consécutives de l'équation (1).

330. En particulier, supposons $\lambda = 0$, on a $\alpha = 0$.

Si m est pair, les racines de l'équation, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs de la suite

$$-\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m},\quad \ldots\ldots,\quad -\frac{\pi}{m},\quad 0,\quad \frac{\pi}{m},\quad \ldots\ldots,\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m};$$

la première racine est $-\infty$, la racine de rang $\frac{m}{2}+1$ est 0; les autres racines sont deux à deux égales et de signes contraires. Si l'on se reporte dans ce cas à l'équation

$$\lambda f(x) - F(x) = 0,$$

on voit que cette équation, qui est généralement du m^{me} degré, devient accidentellement du degré $m-1$, et doit par conséquent être regardée comme ayant une racine infinie. Cette équation ne contenant x qu'à des puissances impaires, on voit encore qu'elle a une

racine nulle, et que les autres racines sont deux à deux égales et de signes contraires.

Dans ce cas, la résolution algébrique de l'équation est ramenée, après la suppression de la racine nulle, à la résolution algébrique d'une équation de degré $\frac{m-2}{2}$.

Si m est impair, les racines de l'équation, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2m},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2m},\quad \ldots\ldots\quad -\frac{\pi}{m},\quad 0,\quad \frac{\pi}{m},\quad \ldots\ldots,\quad \frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2m},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m};$$

elles sont, à part la racine zéro, deux à deux égales et de signes contraires. L'équation (1) se réduit dans ce cas à

$$F(x)=0,$$

elle est du m^{me} degré et ne renferme que des puissances impaires de x : la résolution algébrique de cette équation se ramène, après la suppression de la racine nulle, à la résolution algébrique d'une équation de degré $\frac{m-1}{2}$.

331. Considérons encore le cas où λ est infini; alors $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Si m est pair, les racines de l'équation rangées par ordre de grandeurs croissantes sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2m},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2m},\quad \ldots,\quad -\frac{\pi}{2m},\quad \frac{\pi}{2m},\quad \frac{3\pi}{2m},\quad \ldots,\quad \frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2m},\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m};$$

ces racines sont deux à deux égales et de signes contraires. Dans ce cas, l'équation (1) se réduit à l'équation

$$f(x)=0,$$

équation du m^{me} degré qui ne contient que des puissances paires de x. La résolution algébrique de cette équation se ramène à la résolution d'une équation de degré $\frac{m}{2}$.

Si m est impair, les racines de l'équation, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m},\quad -\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{m},\quad \ldots\ldots,\quad -\frac{\pi}{2m},\quad +\frac{\pi}{2m},\quad +\frac{3\pi}{m},\quad \ldots\ldots,\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m},\quad \frac{\pi}{2};$$

la dernière racine est infinie, les autres sont deux à deux égales et



de signes contraires. Dans ce cas, l'équation (1), qui est généralement du m^{me} degré, est accidentellement du degré $m-1$; on doit la regarder comme ayant une racine infinie; comme d'ailleurs l'équation ne contient que des puissances paires de x, les racines sont deux à deux égales et de signes contraires. La résolution algébrique de l'équation se ramène à la résolution d'une équation de degré $\frac{m-1}{2}$.

Les racines obtenues, soit pour $\lambda=0$, soit pour $\lambda=\infty$, séparent les racines de l'équation (1) pour toute autre valeur de λ. Parmi les racines qui correspondent aux deux cas $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, il y en a toujours une qui est infinie, que l'on peut regarder comme étant $-\infty$ ou $+\infty$; si l'on range par ordre de grandeurs croissantes les $2m-1$ racines finies, et aussi $-\infty$ et $+\infty$, on formera $2m$ intervalles plus resserrés que les précédents. Il est facile de voir que, pour une valeur quelconque attribuée à λ, les racines de l'équation (1) seront toutes, une par une, dans les intervalles de rang impair, ou toutes, une par une, dans les intervalles de rang pair.

332. **Remarque III.** *Lorsque m est pair, les racines de l'équation* (1) *peuvent être groupées deux par deux de façon que le produit des racines de chaque groupe soit égal à* -1.

En effet, si l'on donne à k les m valeurs consécutives, 0, 1, 2,....., $m-1$, les arcs dont les tangentes sont les racines de l'équation sont :

$$\frac{\alpha}{m},\ \frac{\pi+\alpha}{m},\ \frac{2\pi+\alpha}{m},\ \ldots\ \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi+\alpha}{m}, \quad \Bigg| \quad \frac{\frac{m}{2}\pi+\alpha}{m},\ \ldots\ \frac{(m-1)\pi+\alpha}{m}.$$

Or, si l'on décompose cette suite en deux parties de $\frac{m}{2}$ termes chacune, deux arcs qui occupent le même rang, l'un dans la première partie, l'autre dans la seconde, diffèrent entre eux de $\frac{\pi}{2}$. Or de tels arcs ont des tangentes dont le produit est -1. Soient en effet β et $\frac{\pi}{2}+\beta$ deux arcs qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\cot\beta;$$

donc

$$\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{tg}\beta.\cot\beta=-1.$$

Cette circonstance permet, comme on le voit en algèbre, de rame-

ner la résolution de l'équation (1), qui est de degré m, à la résolution d'une équation de degré $\frac{m}{2}$. Il suffit de poser :

$$z = x - \frac{1}{x};$$

comme il y a $\frac{m}{2}$ couples de racines dont le produit est -1, le nombre des valeurs de z est $\frac{m}{2}$, et l'équation en z est de degré $\frac{m}{2}$. Les valeurs de x étant toutes réelles, les valeurs de z sont réelles aussi. A une valeur de z correspondent pour x deux valeurs, racines de l'équation

$$x^2 - zx - 1 = 0.$$

Comme les m valeurs de x sont distinctes, les $\frac{m}{2}$ valeurs de z sont distinctes aussi.

333. **Applications.** — I. *Calculer* $tg\frac{a}{3}$, *en fonction de* $tg a$.

Soit

$$\operatorname{tg} a = \lambda, \qquad \operatorname{tg}\frac{a}{3} = x,$$

on a :

$$(1) \qquad \lambda(1 - 3x^2) - x(3 - x^2) = 0.$$

Si l'on désigne par α l'arc compris entre 0 et π dont la tangente est égale à λ, les racines de l'équation sont les valeurs que prend

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi + \alpha}{3},$$

quand on donne à k trois valeurs entières consécutives.

Si λ est positif ou nul, ces racines seront rangées par ordre de grandeurs croissantes en donnant successivement à k les valeurs

$$-1, \qquad 0, \qquad 1.$$

Si λ est négatif, les racines seront rangées par ordre de grandeurs croissantes si l'on donne successivement à k les valeurs

$$-2, \qquad -1, \qquad 0.$$

Dans tous les cas, les racines de l'équation doivent être séparées

par les racines de l'équation obtenue en faisant $\lambda = 0$. Ces dernières racines, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{3}, \qquad 0, \qquad \frac{\pi}{3};$$

ce sont aussi les racines de l'équation

$$3x - x^3 = 0,$$

ou les nombres

$$-\sqrt{3}, \qquad 0, \qquad +\sqrt{3}.$$

Or, si l'on désigne par $\varphi(x)$ le premier membre de l'équation (1), les signes des résultats obtenus quand on remplace x par ces nombres, par $-\infty$ et par $+\infty$, dans $\varphi(x)$, sont ceux qu'indique le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	$-\lambda$	$+\lambda$	$-\lambda$	$+$

Si λ est positif, il y a une racine dans chacun des trois derniers intervalles ; il y en a une dans chacun des trois premiers intervalles si λ est négatif ; ce qui vérifie le fait énoncé.

Les racines de l'équation (1) doivent aussi être séparées par les racines de l'équation obtenue en faisant $\lambda = \infty$. Ces dernières racines, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6},$$

ou

$$-\frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{2};$$

ce sont aussi les racines de l'équation

$$1 - 3x^2 = 0$$

considérée comme un cas particulier d'une équation du troisième degré dans laquelle le coefficient du terme du troisième degré est devenu nul ; deux de ces racines sont finies et égales l'une à $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'autre à $+\frac{1}{\sqrt{3}}$; la troisième racine est infinie.

Si l'on substitue $-\infty$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $+\infty$ dans $\varphi(x)$, les signes des résultats des substitutions sont ceux qu'indique le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Il y a une racine de l'équation $\varphi(x)=0$ dans chacun des intervalles.

Enfin, si l'on réunit les deux séries de substitutions, on a :

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	$-\lambda$	$+$	$+\lambda$	$-$	$-\lambda$	$+$

ce qui montre que, si λ est positif, il y a une racine dans chacun des intervalles (2), (4), (6), et si λ est négatif, il y a une racine dans chacun des intervalles (1), (3), (5).

II. *Calculer* $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$ *en fonction de* $\operatorname{tg} a$.

Soit

$$\operatorname{tg} a=\lambda, \qquad \operatorname{tg}\frac{a}{4}=x;$$

on a :

$$\lambda(1-6x^2+x^4)-x(4-4x^2)=0,$$

et, si α est l'arc compris entre 0 et π dont la tangente est λ, les racines de cette équation, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{4},$$

ou

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}, \qquad -\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}, \qquad \frac{\alpha}{4}, \qquad \frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}.$$

La résolution algébrique de cette équation peut être ramenée à la résolution algébrique d'une équation du second degré.

En effet, l'équation est

$$\lambda x^4+4x^3-6\lambda x^2-4x+\lambda=0,$$

on peut l'écrire sous la forme

$$\lambda\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)-6\lambda=0.$$

Si l'on pose :

$$x-\frac{1}{x}=z,$$

on a :

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=z^2, \qquad \text{ou} \qquad x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2,$$

et l'équation en z est

$$\lambda z^2+4z-4\lambda=0;$$

cette équation a ses deux racines réelles ; à chacune de ces valeurs de z correspondent deux valeurs de x données par l'équation

$$x^2-zx-1=0.$$

III. *Calculer* $tg\,\frac{a}{5}$ *en fonction de* $tg\,a$.

Soit

$$\operatorname{tg} a=\lambda, \qquad \operatorname{tg}\frac{a}{5}=x,$$

on a :

$$(1) \qquad \lambda(1-10x^2+5x^4)-x(5-10x^2+x^4)=0;$$

si α est l'arc compris entre 0 et π dont la tangente est λ, les racines de cette équation sont les valeurs que prend

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi+\alpha}{5},$$

quand on y donne à k cinq valeurs entières consécutives.

Si λ est positif ou nul, ces racines seront rangées par ordre de grandeurs croissantes en donnant successivement à k les valeurs

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2.$$

Si λ est négatif, les racines seront rangées par ordre de grandeurs croissantes en donnant successivement à k les valeurs

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1.$$

Quelle que soit la valeur attribuée à λ, les racines de l'équation (1)

doivent être séparées par les racines de cette équation qui correspondent à l'hypothèse $\lambda = 0$. Ces racines, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont les tangentes des arcs

$$-\frac{2\pi}{5},\quad -\frac{\pi}{5},\quad 0,\quad \frac{\pi}{5},\quad \frac{2\pi}{5};$$

on peut les déterminer algébriquement, car ce sont les racines de l'équation

$$x(x^4 - 10x^2 + 5) = 0,$$

ou les nombres

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}},\quad -\sqrt{5-2\sqrt{5}},\quad 0,\quad \sqrt{5-2\sqrt{5}},\quad \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Si on les substitue dans le premier membre $\varphi(x)$ de l'équation (1), ainsi que $-\infty$ et $+\infty$, les signes des résultats des substitutions sont indiqués par le tableau

x	$-\infty$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	0	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+$	$+\lambda$	$-\lambda$	$+\lambda$	$-\lambda$	$+\lambda$	$-$

Si λ est positif, il y a une racine dans chacun des cinq derniers intervalles; si λ est négatif, il y a une racine dans chacun des cinq premiers intervalles.

Les racines qui correspondent au cas où $\lambda = \infty$ sont rangées par ordre de grandeurs croissantes, les tangentes des arcs

$$-\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10},\quad -\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10},\quad \frac{\pi}{10},\quad \frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10},\quad \frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10},$$

ou

$$-\frac{3\pi}{10},\quad -\frac{\pi}{10},\quad \frac{\pi}{10},\quad \frac{3\pi}{10},\quad \frac{\pi}{2}.$$

On peut aussi les déterminer algébriquement; ce sont les racines de l'équation

$$5x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

qu'il faut regarder comme un cas particulier d'une équation du cinquième degré; une des racines est infinie, les quatre autres sont $\pm\sqrt{\dfrac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}}$. Si l'on substitue ces racines dans le premier membre

de l'équation, ainsi que $-\infty$ et $+\infty$, les signes des résultats des substitutions sont indiqués dans le tableau

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

L'équation a une racine dans chacun des cinq intervalles.

En rapprochant les résultats des deux séries de substitutions, on a :

		(1)		(2)		(3)		(4)		(5)	
x	$-\infty$		$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$		$-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$		$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$		$-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$		0
$\varphi(x)$	$+$		$+\lambda$		$-$		$-\lambda$		$+$		$+\lambda$

	(6)		(7)		(8)		(9)		(10)	
0		$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$		$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$		$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$		$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$		$+\infty$
$+\lambda$		$-$		$-\lambda$		$+$		$+\lambda$		$-$

Si λ est positif, il y a une racine dans chacun des intervalles (2), (4), (6), (8), (10); si λ est négatif, il y a une racine dans chacun des intervalles (1), (3), (5), (7), (9).

334. **Remarque.** On peut remarquer que, pour $m=3$, et pour $m=5$, les racines qui correspondent à l'hypothèse $\lambda=0$ sont les inverses de celles qui correspondent à l'hypothèse $\lambda=\infty$. Il est facile de reconnaître qu'il en est ainsi pour toute valeur impaire de m.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II.

1. Démontrer que, si l'équation

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

admet pour racines $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, ….., $\operatorname{tg}\lambda$, on a :

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda) = -\frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots\ldots}{A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots\ldots}.$$

2. Si l'on pose :

$$\cos a + i\sin a = u, \quad \cos a - i\sin a = v,$$

on demande d'exprimer $\cos^m a$ et $\sin^m a$ en fonction de u et de v, et de déduire des formules obtenues l'expression de $\cos^m a$ en fonction des cosinus des multiples de l'arc a, et l'expression de $\sin^m a$ en fonction, soit des sinus, soit des cosinus des multiples de l'arc a.

3. Étant donné $\operatorname{tg} a$, calculer soit $\cos \frac{a}{m}$, soit $\sin \frac{a}{m}$; discussion ; nombre des solutions; cas des racines multiples.

4. Étant donné soit $\sin a$, soit $\cos a$, calculer $\operatorname{tg} \frac{a}{m}$; discuter.

5. Étant donné soit $\sin a$, soit $\cos a$, calculer soit $\sin \frac{p}{q} a$, soit $\cos \frac{p}{q} a$, p et q étant deux nombres entiers premiers entre eux ; discuter.

6. Posant $\lambda = \operatorname{tg} a$ et $x = \operatorname{tg} \frac{a}{m}$, on sait que l'on a $\lambda = \frac{F(x)}{f(x)}$, $f(x)$ et $F(x)$ étant des polynômes entiers en x dont la composition est connue; on sait de plus que l'équation $f(x) = 0$ a ses racines réelles, distinctes, deux à deux égales et de signes contraires ; ceci posé : 1° indiquer la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ et chercher les signes des différents numérateurs ; 2° connaissant les signes des numérateurs, en déduire, par des considérations d'algèbre, que l'équation

$$\lambda f(x) - F(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et distinctes, quel que soit λ; 3° calculer les valeurs des différents numérateurs.

7. Démontrer que, m étant un nombre entier et positif, si l'on pose :

$$\cos ma = A \cos^m a + B \cos^{m-2} a + C \cos^{m-4} a + \ldots\ldots$$

et

$$\sin ma = \sin a \left[M \cos^{m-1} a + N \cos^{m-3} a + P \cos^{m-5} a + \ldots\right],$$

la fonction

$$A \sin^m a + B \sin^{m-2} a + C \sin^{m-4} a + \ldots$$

représente $(-1)^{\frac{m}{2}} \cos ma$, ou $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin ma$, suivant que m est pair ou impair, et que la fonction

$$M \sin^{m-1} a + N \sin^{m-3} a + P \sin^{m-5} a + \ldots$$

représente $\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \sin ma}{\cos a}$, ou $\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos ma}{\cos a}$, selon que m est pair ou impair.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE ET TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

§ I. — Résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

335. **Cas particuliers.** Nous examinerons d'abord deux cas particuliers.

1° Considérons l'équation binôme

$$x^3 - 1 = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0;$$

elle équivaut donc aux deux équations

$$x - 1 = 0, \qquad x^2 + x + 1 = 0.$$

La première admet la racine $+1$, la seconde admet les racines imaginaires conjuguées $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, de sorte que les racines de l'équation proposée sont :

$$1, \qquad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ces deux racines imaginaires sont telles que chacune d'elles est le carré de l'autre; on a, en effet,

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

On voit donc que si l'on désigne par α l'une quelconque de ces

racines imaginaires, les trois racines de l'équation binôme $x^3 - 1 = 0$, ou les trois racines cubiques de l'unité, sont :

$$1, \qquad \alpha, \qquad \alpha^2.$$

Ces racines peuvent être mises sous forme trigonométrique ; remarquons pour cela que l'on a identiquement :

$$1 = \cos 0 + i \sin 0,$$

et que résoudre l'équation binôme $x^3 - 1 = 0$, revient à chercher les racines cubiques de la quantité $\cos 0 + i \sin 0$; d'après les formules établies au nº 284, on aura donc, le module étant égal à 1,

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i \sin\frac{2k\pi}{3},$$

et on sait qu'on a toutes les racines en donnant à k les trois valeurs 0, 1, 2, d'où les trois racines

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$
$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}.$$

Nous savons d'ailleurs que $\sin\frac{2\pi}{3}$ est positif et égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, que $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; on a donc :

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

2º Soit en second lieu l'équation binôme

$$x^3 - A = 0,$$

où A est une quantité réelle ou imaginaire donnée. Posons :

$$A = r(\cos\omega + i \sin\omega),$$

on a :

$$x^3 = r(\cos\omega + i \sin\omega),$$

et l'on voit que résoudre cette équation binôme revient à extraire la

racine cubique de la quantité A; on a donc (284) :

$$x = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{3}\right],$$

ou encore, d'après les formules de multiplication des quantités imaginaires,

$$x = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2h\pi}{3} + i\sin\frac{\omega + 2h\pi}{3}\right] \times \left[\cos\frac{2(k-h)\pi}{3} + i\sin\frac{2(k-h)\pi}{3}\right].$$

Le premier facteur, où h est un nombre entier quelconque, représente une quelconque des racines cubiques de A; quant au facteur

$$\cos\frac{2(k-h)\pi}{3} + i\sin\frac{2(k-h)\pi}{3},$$

où k et par suite $k-h$ prennent toutes les valeurs entières possibles, il peut représenter toutes les racines cubiques de l'unité, $1, \alpha, \alpha^2$ (284). On voit donc que pour obtenir toutes les racines cubiques d'une quantité réelle ou imaginaire A, il suffit de multiplier l'une quelconque d'entre elles, a, successivement par 1, α, α^2, de telle sorte que ces trois racines sont :

$$a, \qquad a\alpha, \qquad a\alpha^2.$$

336. **Cas général.** On sait que dans toute équation du troisième degré à coefficients réels ou imaginaires, on peut faire disparaître le second terme de l'équation; nous supposerons cette simplification effectuée, et nous considérerons l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

où p et q sont des quantités données *réelles* ou *imaginaires*. Posons :

$$(2) \qquad x = y + z;$$

l'équation devient

$$y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + p(y+z) + q = 0,$$

ou

$$(3) \qquad y^3 + z^3 + (3yz + p)(y+z) + q = 0.$$

Les deux nouvelles inconnues y et z ne sont assujetties qu'à vérifier la relation précédente; on peut donc les astreindre à satisfaire à une autre équation telle cependant que y et z n'y entrent pas seulement par leur somme, par exemple à l'équation

$$(4) \qquad 3yz + p = 0.$$

L'équation (3) se réduit alors à

(5) $$y^3+z^3+q=0,$$

et l'on voit que pour résoudre l'équation proposée (1), on déterminera y et z au moyen des deux équations simultanées

(4) $$3yz+p=0$$
(5) $$y^3+z^3+q=0,$$

et on portera leurs valeurs dans la relation (2) $x=y+z$, qui donnera x.

De l'équation (4) on tire :

$$z=-\frac{p}{3y},$$

et en substituant dans (5), on a, pour déterminer y, l'équation

(6) $$y^3-\left(\frac{p}{3y}\right)^3+q=0,$$

ou

(7) $$y^6+qy^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0,$$

équation du second degré en y^3, que l'on sait résoudre; y^3 étant connu, on en déduira (335) facilement y; d'ailleurs, puisque $z=-\frac{p}{3y}$, on aura :

(8) $$x=y-\frac{p}{3y}.$$

Ainsi toute la question est ramenée à résoudre l'équation (7), et, en portant successivement les valeurs de y, racines de cette équation (7), dans la relation (8), on aura les valeurs de x cherchées. Or, l'équation (7) admet en y^3 deux valeurs; à chaque valeur de y^3 correspondent trois valeurs différentes de y; il semble donc que l'on obtiendra six valeurs pour x. Or, on démontre en algèbre que l'équation (1) en x n'admet pour x que trois racines; il faut donc faire voir que le calcul précédent ne fournit pour x que trois valeurs, et montrer comment on peut les obtenir.

Remarquons que, si on change y en $-\frac{p}{3y}$, la valeur de x ne change pas, que l'équation (6) ne change pas non plus; les racines de l'équation (6) et par suite de l'équation (7) sont donc telles que si y est une quelconque de ces racines, $-\frac{p}{3y}$ est également une racine. Ainsi les racines de l'équation (7) s'associent deux à deux de telle

sorte que leur produit soit égal à $-\frac{p}{3}$, et comme à chacune des racines d'un couple de valeurs associées ne correspond pour x qu'une seule valeur, on voit que l'on n'obtiendra pour x que trois valeurs. Pour les obtenir, il suffit de partager les six valeurs de y en deux groupes tels qu'à chaque racine du premier groupe correspond une racine du second et une seule, de telle sorte que le produit des deux valeurs associées soit égal à $-\frac{p}{3}$; nous dirons que chacun de ces groupes est *un groupe de valeurs distinctes* de y; si l'on substitue les valeurs des trois racines de l'un quelconque de ces groupes dans la relation (8), on aura les trois valeurs de x, racines de l'équation (1).

Résolvons l'équation (7) en y^3 et désignons par A^3 et B^3 les deux racines; on a :

$$(9)\quad A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Les six valeurs de y sont :

$$A, \quad A\alpha, \quad A\alpha^2, \qquad B, \quad B\alpha, \quad B\alpha^2,$$

A étant l'une quelconque des racines cubiques de A^3, B l'une quelconque des racines cubiques de B^3 (335).

Je dis que les trois premières valeurs forment *un groupe de valeurs distinctes*. En effet, remarquons que A^3 et B^3 étant les deux racines de l'équation du second degré (7) en y^3, le produit $A^3B^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$; donc sa racine cubique, c'est-à-dire le produit de l'une quelconque des racines cubiques de A^3 par l'une quelconque des racines cubiques de B^3, admet nécessairement l'une des trois valeurs

$$-\frac{p}{3}, \qquad -\frac{p}{3}\alpha, \qquad -\frac{p}{3}\alpha^2.$$

Si A et B sont des valeurs telles que le produit $AB = -\frac{p}{3}$, A et B sont des valeurs associées; si A et B ont pour produit $-\frac{p}{3}\alpha$, A et $B\alpha^2$ sont deux valeurs associées, car $A.B\alpha^2 = -\frac{p}{3}\alpha.\alpha^2 = -\frac{p}{3}\alpha^3 = -\frac{p}{3}$, puisque $\alpha^3 = 1$; enfin, si A et B ont pour produit $-\frac{p}{3}\alpha^2$, A et $B\alpha$ sont deux valeurs associées, car on a $A.B\alpha = AB.\alpha = -\frac{p}{3}\alpha^2.\alpha = -\frac{p}{3}$. Il résulte de là que, A étant l'une quelconque des racines cubiques de A^3, il existe parmi les trois racines cubiques de B^3, une et une

seule telle qu'elle s'associe avec A de manière que leur produit soit égal à $-\frac{p}{3}$. Appelons B celle des racines cubiques de B^3 qui s'associe avec A; les couples de valeurs associées sont:

$$A \text{ et } B, \qquad A\alpha \text{ et } B\alpha^2, \qquad A\alpha^2 \text{ et } B\alpha,$$

et, par suite, A, $A\alpha$, $A\alpha^2$, forment ce que nous avons appelé *un groupe de valeurs distinctes;* dès lors les trois valeurs de x sont:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= A - \frac{p}{3A} \\ x'' &= A\alpha - \frac{p}{3A\alpha} \\ x''' &= A\alpha^2 - \frac{p}{3A\alpha^2}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (8), ces trois valeurs sont comprises dans la formule suivante :

$$(11) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}},$$

où le radical cubique peut avoir l'une quelconque de ses trois déterminations.

Si l'on remarque que, d'après les relations

$$AB = -\frac{p}{3}, \qquad A\alpha.\,B\alpha^2 = -\frac{p}{3}, \qquad A\alpha^2.\,B\alpha = -\frac{p}{3},$$

on a:

$$B = -\frac{p}{3A}, \qquad B\alpha^2 = -\frac{p}{3A\alpha}, \qquad B\alpha = -\frac{p}{3A\alpha^2}$$

les valeurs (10) de x peuvent s'écrire :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= A + B \\ x'' &= A\alpha + B\alpha^2 \\ x''' &= A\alpha^2 + B\alpha \end{aligned} \right.$$

A et B étant deux racines cubiques de A^3 et de B^3 dont le produit est égal à $-\frac{p}{3}$. Ces formes (12) de valeurs de x ont été données par *Cardan.*

La méthode précédente, qui est due à *Hudde*, est applicable, que les coefficients p et q soient ou réels ou imaginaires. Nous allons discuter, en supposant maintenant les *coëfficients réels*.

337. **Discussion dans le cas où les coefficients** p **et** q **sont réels.** Nous distinguerons trois cas.

1° Supposons $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$; les valeurs de A^3 et de B^3 sont réelles; chacune de ces quantités admet une racine cubique réelle et une seule (286 et 288); désignons par A et par B les racines cubiques réelles de A^3 et de B^3; ces valeurs sont associées, puisqu'à la valeur réelle A, correspond la valeur associée $-\frac{p}{3A}$ également réelle; les trois valeurs de x sont donc, en remplaçant α et α^2 par leurs valeurs,

$$\left\{\begin{aligned} x' &= A + B \\ x'' &= A\alpha + B\alpha^2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2} \\ x''' &= A\alpha^2 + B\alpha = -\frac{A+B}{2} - i\frac{(A-B)\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}\right.$$

De ces trois valeurs la première est réelle, les deux autres sont imaginaires et imaginaires conjuguées, car $A - B$ n'est pas nul, sans quoi A^3 serait égal à B^3, ce qui est contre l'hypothèse. Donc: *Si l'on a* $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, *l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *admet une seule racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées.*

2° Supposons $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$; dans ce cas, les quantités A^3 et B^3 sont égales, leurs racines cubiques réelles A et B sont aussi égales, les trois valeurs de x sont réelles, mais x'' et x''' sont égales entre elles; donc : *Si l'on a* $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, *l'équation* $x^3 + px + q = 0$, *admet une racine simple et une racine double.*

3° Supposons enfin $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$; dans ce cas, les valeurs de A^3 et de B^3 sont imaginaires et imaginaires conjuguées, A et B sont également imaginaires, et les valeurs de x se présentent sous formes compliquées d'imaginaires; on sait cependant soit par le théorème de Rolle, soit par le théorème de Sturm, que ces valeurs sont réelles et distinctes. On peut s'en rendre compte de la manière suivante : soit

$$a + bi, \qquad (a+bi)\alpha, \qquad (a+bi)\alpha^2,$$

les trois racines cubiques imaginaires de A^3; l'expression imaginaire conjuguée B^3 aura (292) pour racines cubiques

$$a - bi, \qquad (a-bi)\alpha, \qquad (a-bi)\alpha^2.$$

Les deux racines cubiques associées A et B devant avoir leur produit réel, on voit que l'on peut associer les valeurs $A = a + bi$ et $B = a - bi$, et par suite les trois valeurs de x sont :

$$(13)\qquad \begin{cases} x' = A + B \quad = \; 2a \\ x'' = A\alpha + B\alpha^2 = -a + b\sqrt{3} \\ x''' = A\alpha^2 + B\alpha = -a - b\sqrt{3}, \end{cases}$$

et sont réelles.

Je dis de plus que ces valeurs sont inégales : en effet, on ne peut avoir d'abord :

$$2a = -a \pm b\sqrt{3},$$

car on en déduirait : $\qquad b = \pm\, a\sqrt{3}, \qquad A = a\left(1 \pm i\sqrt{3}\right),$ et $A^3 = a^3\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)^3$; or le second membre est réel, le premier est imaginaire par hypothèse, donc l'égalité est impossible. Enfin, on ne peut pas avoir :

$$-a - b\sqrt{3} = -a + b\sqrt{3},$$

car on en déduirait $b = 0$, ce qui est impossible, attendu qu'on a vu qu'une quantité imaginaire A^3 ne peut pas avoir de racine cubique réelle (290).

Donc : *Si l'on a* $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, *l'équation* $x^3 + px + q = 0$ *a ses trois racines réelles et distinctes.*

338. On voit que, dans ce cas, bien que les formules (12) présentent les racines sous des formes compliquées d'imaginaires, ces racines sont réelles. Ce cas se nomme le cas *irréductible ;* car si on veut déterminer *algébriquement* les quantités réelles a et b dont les valeurs permettent d'obtenir les valeurs de x par les formules (13), on est conduit à résoudre des équations du troisième degré de même forme que la proposée, ayant leurs trois racines réelles et dont les valeurs sont, comme les racines de l'équation proposée, compliquées d'imaginaires. Si on se propose au contraire de mettre les imaginaires A^3 et B^3 sous forme trigonométrique et de calculer *trigonométriquement* leurs racines cubiques, il est très facile de calculer par logarithmes les trois valeurs de x, et de démontrer que ces trois valeurs sont réelles et distinctes.

339. **Calcul des racines.** *Premier cas.* Supposons $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, c'est le cas irréductible ; A^3 et B^3 sont imaginaires ; en mettant les

imaginaires en évidence, ces valeurs peuvent s'écrire :

$$A^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad B^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Calculons le module et l'argument de A^3 ; ce module r est donné par la formule

$$(14) \qquad r = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3};$$

r est réel, car l'inégalité $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ exige $p < 0$; r étant connu, l'argument ω sera déterminé par la relation

$$(15) \qquad \cos\omega = -\frac{q}{2r} = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

et, comme dans A^3 le coefficient de i est positif, on prendra pour ω l'angle positif moindre que π qui satisfait à cette équation, il y en a un et un seul. On aura donc :

$$A^3 = r(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Si l'on remarque que B^3 et A^3 sont imaginaires conjuguées, on aura simultanément :

$$B^3 = r(\cos\omega - i\sin\omega).$$

On en déduit (284) :

$$A = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{3}\right]$$
$$B = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{-\omega + 2k'\pi}{3} + i\sin\frac{-\omega + 2k'\pi}{3}\right],$$

k et k' étant pris parmi les nombres 0, 1, 2, ou en remplaçant r par sa valeur

$$\begin{cases} A = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{3}\right] \\ B = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{-\omega + 2k'\pi}{3} + i\sin\frac{-\omega + 2k'\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Rappelons-nous que A étant l'une quelconque des racines cubiques de A^3, nous devons prendre pour B celle des racines cubiques de B^3

qui est telle que le produit AB soit réel ; il faut donc associer k et k' de telle sorte que la somme des arguments de A et de B soit égale à un multiple pair de π, c'est-à-dire que

$$\frac{\omega + 2k\pi}{3} + \frac{-\omega + 2k'\pi}{3} = 2h\pi,$$

h étant un nombre entier, ou

$$k + k' = 3h.$$

Or k et k' étant positifs et moindres que 3, il faut que h soit égal à 1, et par suite que l'on ait $k' = 3 - k$. Les valeurs associées de A et de B sont alors fournies par les relations

$$\left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{3}\right] \\ B &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\omega + 2k\pi}{3}\right], \end{aligned}\right.$$

et en donnant à k les valeurs 0, 1, 2, on aura les trois couples de valeurs associées ; on voit que ces valeurs associées sont des racines imaginaires conjuguées de A^3 et de B^3. D'ailleurs x_k étant l'une quelconque des valeurs de x cherchées, x_k est la somme des deux valeurs associées correspondantes, et on a :

$$(16) \qquad x_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\omega + 2k\pi}{3}.$$

Les trois racines sont donc :

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\omega}{3} \\ x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\omega + 2\pi}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\omega + 4\pi}{3}, \end{aligned}\right.$$

et l'on voit que ces racines sont toutes les trois réelles.

En résumé, le calcul numérique des racines est le suivant : on calcule l'angle ω compris entre 0 et π et satisfaisant à la relation (15), et on porte cette valeur de ω dans les relations (17) qui fournissent les trois racines. Comme vérification, la somme des trois racines doit être nulle.

340. Il est souvent utile de connaître l'ordre de grandeur des trois racines ; je dis que l'on a :

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

En effet, puisque par hypothèse on a :

$$0 < \omega < \pi,$$

on en déduit :

$$0 < \frac{\omega}{3} < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} < \frac{\omega + 2\pi}{3} < \pi$$

$$\frac{4\pi}{3} < \frac{\omega + 4\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}.$$

Soient, sur le cercle trigonométrique (*fig.* 101), C, D, E, F, les extrémités des arcs d'origine A, égaux à $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. L'extrémité N_0 de l'arc $\frac{\omega}{3}$ est sur l'arc AC, l'extrémité N de l'arc $\frac{\omega + 2\pi}{3}$ est sur l'arc DA′, et l'extrémité N_2 de l'arc $\frac{\omega + 4\pi}{3}$ est sur l'arc EF ; comme d'ailleurs

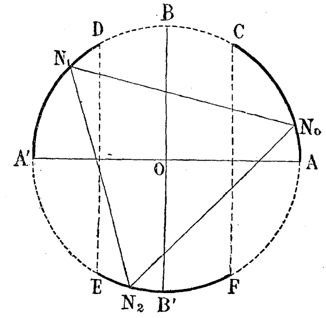


Fig. 101.

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

et $$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

on a les inégalités

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{\omega}{3} < 1$$

$$-1 < \cos\frac{\omega + 2\pi}{3} < -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \cos\frac{\omega + 4\pi}{3} < \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\cos\frac{\omega + 2\pi}{3} < \cos\frac{\omega + 4\pi}{3} < \cos\frac{\omega}{3},$$

et, en multipliant par la quantité positive $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$,

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

La discussion précédente montre que, l'angle ω calculé par la formule (15) n'étant ni o ni π, les trois racines x_0, x_1, x_2, sont inégales.

341. *Deuxième cas.* Supposons $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$; les valeurs de A^3 et de B^3 sont réelles et distinctes; en désignant par A et par B leurs racines cubiques réelles, nous avons vu que les trois racines cherchées sont :

$$(18)\qquad \begin{cases} x' = A + B \\ x'' = -\frac{A+B}{2} + i\frac{A-B}{2}\sqrt{3} \\ x''' = -\frac{A+B}{2} - i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}, \end{cases}$$

la première étant réelle, les deux autres imaginaires conjuguées. Proposons-nous de calculer, au moyen des tables de logarithmes, les valeurs de A et de B.

1° Supposons d'abord $q > 0$; dans ces conditions, en faisant sortir $\frac{q}{2}$ du radical carré, on ne change pas le signe devant le radical. On aura donc :

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2}}\right)}$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2}}\right)}.$$

(α). Si l'on a $p > 0$, on pose :

$$(19)\qquad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2} = \frac{4p^3}{27q^2}.$$

et on prend pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; on en déduit:

$$(20)\quad \begin{cases} A = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}} \\ B = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1-\frac{1}{\cos\varphi}\right)} = -\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}} \end{cases}$$

(β). Si l'on a $p < 0$, on pose :

$$(21)\qquad \sin^2\varphi = -\frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)} = -\frac{4p^3}{27q^2},$$

ce qui est possible, puisque les valeurs de A et de B sont réelles, et on prend pour φ l'angle positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à cette relation ; on en déduit :

$$(22)\quad \begin{cases} A = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1+\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1+\cos\varphi\right)} = -\sqrt[3]{q\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ B = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1-\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(-1-\cos\varphi\right)} = -\sqrt[3]{q\cos^2\frac{\varphi}{2}} \end{cases}$$

(γ). Si on a enfin $p = 0$, on obtient immédiatement, q étant positif,

$$(23)\qquad A = 0, \qquad B = -\sqrt[3]{q}.$$

2° Si nous supposons maintenant $q < 0$, en faisant sortir $\frac{q}{2}$ du radical carré, le signe de ce radical doit être changé ; les valeurs de A et de B s'échangent entre elles, et on a :

$$(\alpha)\quad p > 0 \quad (19)'\quad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2} \qquad (20)'\quad \begin{cases} A = -\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}} \\ B = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}} \end{cases}$$

$$(\beta)\quad p<0\quad (21)'\quad \sin^2\varphi=-\frac{4p^3}{27q^2}\quad (22)'\quad \left\{\begin{array}{l} A=-\sqrt[3]{q\cos^2\frac{\varphi}{2}}\\ B=-\sqrt[3]{q\sin^2\frac{\varphi}{2}}\end{array}\right.$$

$$(\gamma)\quad p=0\quad (23)'\qquad A=-\sqrt[3]{q}\quad B=0.$$

342. ***Troisième cas.*** Supposons enfin $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$. Ce cas peut être regardé comme la transition entre les deux premiers cas ; on peut donc le rattacher soit au premier, soit au second.

En le rattachant au premier, on a :

$$\cos\omega=-\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=-\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2}}=\mp 1,$$

-1 si q est positif, $+1$ si q est négatif.

Si l'on a $q>0$, on a $\cos\omega=-1$, $\omega=\pi$, et les valeurs des trois racines sont :

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\\ x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\pi=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\\ x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{5\pi}{3}=\sqrt{-\frac{p}{3}};\end{array}\right.$$

si on a $q<0$, on a $\cos\omega=+1$, $\omega=0$, et les valeurs des trois racines sont :

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos 0=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\\ x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\\ x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{-\frac{p}{3}},\end{array}\right.$$

et, dans un cas comme dans l'autre, l'équation admet une racine double ; dans le premier cas, on a $x_0=x_2$, dans le second $x_1=x_2$.

Ce fait résulte de la grandeur relative des trois racines

$$x_1<x_2<x_0;$$

on voit que l'équation ne peut avoir de racine double que si la racine intermédiaire x_2 devient égale à l'une des racines extrêmes x_0 ou x_1.

On démontre en algèbre que, si p et q sont commensurables, et si l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ admet une racine double, la racine double et la racine simple sont commensurables; il résulte de là que $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ doit s'exprimer, dans le cas actuel, en fonction rationnelle de p et de q. Il est facile de le vérifier : on a en effet, par hypothèse, $\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$, d'où en extrayant la racine carrée des deux membres et remarquant que p est négatif,

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = \text{valeur absolue de } \frac{q}{2};$$

donc si q est positif, $-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{q}{2}$, d'où $\sqrt{-\frac{p}{3}} = -\frac{3q}{2p}$; or, dans ce cas $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ est la racine double; cette racine double est donc $-\frac{3q}{2p}$.

Si q est négatif, $-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = -\frac{q}{2}$, d'où $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{3q}{2p}$; mais la racine double étant alors $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$, cette racine est encore égale à $-\frac{3q}{2p}$. Ainsi, lorsque $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, l'équation du troisième degré (1) admet une racine double égale à $-\frac{3q}{2p}$; la racine simple est, par suite, égale à $\frac{3q}{p}$, puisque la somme des trois racines est nulle.

343. Si on rattache le cas actuel au second cas, la racine double et la racine simple se présentent sous une autre forme; en effet, dans ce cas, on a :

$$A = B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

et par suite, on a :

$$(26) \qquad x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \qquad x'' = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \qquad x''' = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Vérifions que la racine double $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ est bien $-\frac{3q}{2p}$; multiplions les deux membres de la relation

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

par $\frac{q}{2}$, et extrayons la racine cubique ; nous aurons :

$$-\frac{p}{3}\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \frac{q}{2},$$

d'où $\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -\frac{3q}{2p}$; la racine double est donc $-\frac{3q}{2p}$, et la racine simple est $\frac{3q}{p}$.

§ II. — Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

344. Soit

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

une équation du troisième degré à coefficients réels ; lorsque les racines de cette équation sont réelles, on peut facilement résoudre cette équation en la comparant à celle qui donne $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$.

On sait (308) que, si on pose $\cos\frac{a}{3} = y$, y satisfait à l'équation

$$(2) \qquad y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{\cos a}{4} = 0,$$

et que les racines de cette équation sont données par la formule

$$(3) \qquad y = \cos\frac{a + 2k\pi}{3},$$

où on donne à k trois valeurs entières consécutives quelconques. On ne peut pas identifier l'équation (1) avec l'équation (2), car la première contient deux paramètres arbitraires p et q, tandis que la seconde n'en contient qu'un, $\cos a$. Pour rendre l'identification possible, multiplions les racines de l'équation (2) par un paramètre arbitraire r, et posons :

$$x = ry,$$

d'où $y = \frac{x}{r}$, et remplaçons y par cette valeur dans l'équation (2), nous aurons l'équation

$$(4) \qquad x^3 - \frac{3r^2}{4}x - \frac{r^3 \cos a}{4} = 0;$$

les trois racines de l'équation (4) sont alors

$$(5) \qquad x = r \cos \frac{a + 2k\pi}{3}.$$

Identifions les équations (1) et (4); les coefficients des mêmes puissances de l'inconnue dans ces deux équations doivent être proportionnels, et comme les coefficients de x^3 sont égaux, les coefficients de x doivent être égaux entre eux, ainsi que les termes tout connus. On a donc, pour déterminer r et $\cos a$, les deux équations

$$p = -\frac{3r^2}{4}, \qquad q = -\frac{r^3 \cos a}{4},$$

d'où l'on déduit :

$$(6) \qquad r^2 = -\frac{4p}{3}, \qquad \cos a = -\frac{4q}{r^3}.$$

345. Pour que l'identification soit possible, p et q étant réels par hypothèse, il faut d'abord que $\cos a$ soit réel; il faut donc que r soit réel et par suite que l'on ait $p < 0$; il faut de plus que la valeur de $\cos a$, qui est réelle, soit comprise entre -1 et $+1$, ou que son carré soit moindre que 1; on doit donc avoir :

$$\frac{16q^2}{r^6} < 1, \qquad \text{ou} \qquad \frac{q^2}{-4\left(\frac{p}{3}\right)^3} < 1,$$

ou, comme p est négatif,

$$\frac{q^2}{4} < -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

condition qui entraîne la première $p < 0$. L'identification est donc possible seulement si l'on a :

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

c'est-à-dire si l'équation (1) a ses trois racines réelles.

346. Supposons cette condition remplie; la première des équations (6) donne alors pour r deux valeurs égales et de signes contraires; je dis qu'on peut toujours supposer r positif. En effet si on change r en $-r$ dans la relation $\cos a = -\frac{4q}{r^3}$, la valeur de $\cos a$ change de signe sans changer de valeur absolue; si on remplace dans l'équation (2) $\cos a$ par $-\cos a$ et y par $-y$, l'équation ne change pas; ainsi si on change r en $-r$, $\cos a$ se change en $-\cos a$, y se change en $-y$; et, comme $x = ry$, la valeur de x n'est pas modifiée. Nous prendrons donc :

$$(7) \qquad r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

et nous calculerons l'arc a par la formule

$$(8) \qquad \cos a = -\frac{4q}{r^3} = -\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}};$$

nous désignerons par a l'arc positif, moindre que π, qui satisfait à cette relation, et nous aurons :

$$(9) \qquad x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a + 2k\pi}{3};$$

en donnant à k les trois valeurs consécutives 0, 1, 2, nous obtiendrons les trois racines, supposées réelles, de l'équation (1); ce sont les valeurs déjà obtenues (339), et le calcul numérique est absolument le même.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III.

1. Résoudre l'équation

$$(x+a)^3 + b(x+c)^3 = 0$$

où a, b, c sont des nombres réels et donnés.

2. Si α est une racine cubique imaginaire de l'unité, démontrer que l'expression

$$(x + a\alpha)^3 + (x + a\alpha^2)^3$$

est réelle; en déduire la résolution de l'équation

$$2x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + 2a^3 = 0.$$

3. Résoudre l'équation

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

en posant $x = y + z$, $yz = -p$; discuter.

4. Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} 2x + \cot x = m.$$

5. Une sphère de rayon R et de densité d plonge dans un liquide de densité d'; calculer la hauteur de la calotte de la sphère plongée dans le liquide, lorsqu'il y a équilibre.

6. Résoudre un triangle rectangle, connaissant les deux bissectrices des angles aigus; calcul des angles.

7. Résoudre un triangle rectangle, connaissant un côté b de l'angle droit et la bissectrice β de l'angle B; appliquer en supposant $b = 3$, $\beta = 2$.

8. Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse a et la somme l^2 des carrés des bissectrices des angles aigus; appliquer au cas où $a = 3$, $l^2 = 10$.

9. Soit $\frac{k}{2\sqrt{2}}$ le rapport des longueurs des bissectrices des angles B et C d'un triangle rectangle: calculer $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

10. Calculer l'hypoténuse et la hauteur d'un triangle rectangle, connaissant la somme $3a$ de ces longueurs, et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse; appliquer au cas où $a = 1$, $b = 0,5$.

11. Calculer la hauteur d'un triangle isocèle, connaissant le rayon r de l'un des cercles tangents aux trois côtés, et la surface mr^2.

12. Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle en fonction des distances du centre aux trois sommets; cas où l'on remplace le cercle inscrit par un des cercles exinscrits.

13. Calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle, connaissant les distances α, β, γ, du centre aux trois côtés; discuter.

14. Résoudre un triangle, connaissant le périmètre $2p$, le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit; discuter le problème, et déterminer : 1° r étant donné, entre quelles limites doit varier R; 2° r et R étant donnés, entre quelles limites doit varier p; appliquer au cas où, le triangle étant isocèle, $r = \frac{4}{3}$, $R = \frac{25}{6}$.

15. Résoudre un triangle ABC, connaissant l'angle A et les longueurs β et γ des deux bissectrices des angles B et C; calcul des angles.

16. Calculer le troisième côté d'un triangle ABC, connaissant les côtés a, b et le rayon r d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle; appliquer en supposant $a = 4$, $b = 3$, $r = 1$.



17. Déterminer les dimensions d'un trapèze isocèle ABCD circonscriptible à un cercle, connaissant le périmètre $4a$ de ce trapèze et le volume $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ du tronc de cône engendré par ce trapèze en tournant autour de la droite qui passe par les milieux des côtés parallèles; discuter; appliquer au cas où $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

18. Calculer la hauteur d'un cône droit, connaissant le volume et l'arête latérale.

19. Variations de la surface comprise entre trois arcs de cercle de même rayon et de longueur donnée.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS BINÔMES.

§ I. Propriétés des racines des équations binômes. — § II. Polygones réguliers.

§ I. — Propriétés des racines des équations binômes.

347. On appelle *équation binôme* toute équation de la forme

$$(1) \qquad z^m - A = 0,$$

où A est une quantité donnée, réelle ou imaginaire, et où m est un nombre entier positif. Résoudre cette équation, c'est chercher les valeurs réelles ou imaginaires qui, mises à la place de z, vérifient l'équation, c'est-à-dire les valeurs telles que la m^e puissance de chacune d'elles reproduise A ; les valeurs cherchées sont donc, par définition, les racines m^{es} de A. Si on pose :

$$A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

r étant essentiellement positif, on a (284) :

$$(2) \qquad z = r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right],$$

et on aura toutes les valeurs de z, en donnant au nombre entier k, m valeurs entières consécutives.

En particulier, si on considère l'équation binôme

$$(3) \qquad x^m - 1 = 0,$$

obtenue en supposant A égal à 1, les racines auront pour expression

$$(4) \qquad x = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

et, si on donne m valeurs entières consécutives quelconques à k, on aura les m racines.

La valeur de z fournie par la relation (2) peut s'écrire,

$$z = r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\alpha + 2k'\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k'\pi}{m}\right] \times \left(\cos\frac{2(k-k')\pi}{m} + i\sin\frac{2(k-k')\pi}{m}\right);$$

k' étant un nombre entier quelconque; l'expression

$$r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\alpha+2k'\pi}{m}+i\sin\frac{\alpha+2k'\pi}{m}\right]$$

représente l'une quelconque des racines m^{es} de A; quant au second facteur, $\cos\frac{2(k-k')\pi}{m}+i\sin\frac{2(k-k')\pi}{m}$, si on donne, k' étant fixe, à k, et par suite à $k-k'$, toutes les valeurs entières possibles, il représente toutes les racines de l'équation binôme

(3) $$x^m-1=0.$$

On voit donc que, pour résoudre l'équation binôme (1), il suffit de multiplier l'une quelconque des racines m^{es} de A successivement par chacune des m racines de l'équation (3).

348. L'étude des propriétés des racines de l'équation binôme la plus générale est donc ramenée à l'étude des propriétés des racines de l'équation binôme particulière

(1) $$x^m-1=0.$$

On a vu que, x étant une quelconque des racines de cette équation, on a :

(2) $$x=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

et on obtient toutes les racines en donnant m valeurs entières consécutives quelconques à k, par exemple, les m valeurs

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots\quad m-1.$$

Si nous désignons d'une manière générale par x_k la racine d'argument $\frac{2k\pi}{m}$, on voit que les m racines seront représentées par

$$x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots\ldots\quad x_{m-1};$$

la première de ces racines est réelle, positive et égale à 1; si m est impair, toutes les autres racines sont imaginaires; si m est pair, la racine $x_{\frac{m}{2}}$ est réelle, négative et égale à -1, toutes les autres racines sont imaginaires (286).

349. On peut, comme nous l'avons expliqué au n° 285, représenter géométriquement chacune de ces racines; pour cela considérons un cercle de rayon égal à l'unité de longueur (*fig.* 102); marquons le diamètre origine AA' et l'origine A des arcs; l'argument d'une quan-



tité réelle et positive étant o, à partir du point A, divisons la circonférence en m parties égales, et soient A, M_1, M_2, ..., M_{m-1} les points de division; ces points sont les m sommets d'un polygone régulier de m côtés, et les grandeurs géométriques OA, OM_1, OM_2, ..., OM_{m-1}, représentent, comme on l'a vu, les m racines $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

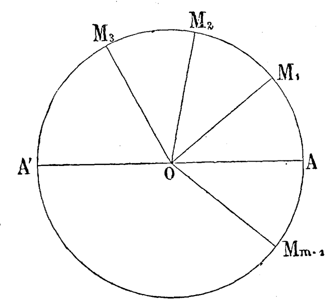


Fig. 102.

350. **Théorème I.** *Les racines imaginaires de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ sont deux à deux conjuguées et réciproques.*

Cherchons la condition pour que deux racines imaginaires x_k et $x_{k'}$ soient conjuguées; il faut et il suffit que la somme des arguments soit égale à un multiple de 2π, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = 2h\pi,$$

h étant un nombre entier, ou en divisant par 2π,

$$k + k' = mh.$$

Or, les racines étant supposées imaginaires, k et k' sont, par hypothèse, choisis parmi les nombres $1, 2, \ldots, m-1$, et sont distincts; la somme $k+k'$ est positive et moindre que $2m$; il faut donc faire $h=1$, et par suite les racines x_k et $x_{k'}$ sont conjuguées, si on a:

$$k + k' = m, \quad \text{ou} \quad k' = m - k.$$

Ainsi, à chacune des valeurs de k correspond une valeur de k' et une seule distincte de k, excepté si, m étant pair, on fait $k = \frac{m}{2}$; mais alors la racine $x_{\frac{m}{2}}$ correspondante est réelle et égale à -1. Donc les racines imaginaires sont deux à deux conjuguées.

Ces racines conjuguées sont en même temps réciproques; car leur produit $x_k x_{m-k}$ est égal au carré du module, c'est-à-dire à l'unité.

351. **Théorème II.** *Le produit de deux racines de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ est une racine de la même équation.*

Considérons, en effet, les deux racines

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

$$x_{k'} = \cos\frac{2k'\pi}{m} + i\sin\frac{2k'\pi}{m},$$

nous aurons (278) :

$$x_k \cdot x_{k'} = \cos\frac{2(k+k')\pi}{m} + i\sin\frac{2(k+k')\pi}{m},$$

et par suite

$$x_k \cdot x_{k'} = x_{k+k'}.$$

352. **Corollaire I.** *Le produit de p racines distinctes ou non de l'équation binôme* $x^m - 1 = 0$ *est une racine de la même équation,*

$$x_{k_1} \cdot x_{k_2} \ldots\ldots x_{k_p} = x_{k_1+k_2+\ldots+k_p}.$$

353. **Corollaire II.** *Le quotient de deux racines de l'équation binôme* $x^m - 1 = 0$ *est racine de la même équation.*

En effet, x_k et $x_{k'}$, étant deux racines, on a (280) :

$$\frac{x_k}{x_{k'}} = \cos\frac{2(k-k')\pi}{m} + i\sin\frac{2(k-k')\pi}{m} = x_{k-k'}.$$

354. **Corollaire III.** *Toute puissance entière d'une racine de l'équation binôme* $x^m - 1 = 0$ *est racine de la même équation.*

Si l'exposant p de la puissance est positif, on a, d'après le premier corollaire,

$$(x_k)^p = x_k \cdot x_k \cdot \ldots\ldots x_k = x_{pk}.$$

Si p est négatif et égal à $-q$, on a :

$$(x_k)^p = (x_k)^{-q} = \frac{1}{(x_k)^q} = \frac{1}{x_{qk}} = x_{-qk} = x_{pk}.$$

355. **Définition.** *On appelle racine primitive de l'équation binôme* $x^m - 1 = 0$ *toute racine* x_k *dont l'indice k est premier avec m.*

Si m est premier, toute racine, sauf la racine $x_0 = 1$, est primitive ; si m n'est pas premier, il y a autant de racines primitives qu'il y a de nombres premiers avec m et inférieurs à m.

356. **Théorème III.** *Si on élève une racine primitive de l'équation binôme* $x^m - 1 = 0$ *à toutes les puissances successives, on reproduit périodiquement, dans un certain ordre, toutes les racines de l'équation binôme.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme. Si, k étant premier avec m, on divise par m les m multiples de k,

$$0k, \quad 1k, \quad 2k, \quad \ldots\ldots \quad (m-1)k,$$

on obtient dans un certain ordre, comme restes, les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots\ldots \quad m-1.$$

En effet, les restes sont tous inférieurs à m, donc ils se trouvent parmi les m nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$; de plus, deux multiples distincts de k ne peuvent fournir le même reste ; si en effet on avait :

$$nk = mq + r$$
$$n'k = mq' + r,$$

on en déduirait :

$$(n-n')k = m(q-q');$$

or m, puisque q est différent de q', divise le second membre, donc, si l'égalité était possible, m devrait diviser $(n-n')k$, et comme il est premier avec k, il devrait diviser $n-n'$, ce qui est impossible, puisque n et n' étant positifs et moindres que m, leur différence est, à fortiori, moindre que m.

Ainsi, les restes sont tous distincts, au nombre de m, et inférieurs à m; ce sont donc les m nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$, dans un certain ordre.

357. *Démonstration*. Ceci posé, soit x_k une racine primitive de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$, c'est-à-dire une racine telle que son indice k soit premier avec m. Élevons d'abord cette racine aux puissances successives $0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1$; nous obtiendrons les racines

$$x_{0k}, \quad x_{1k}, \quad x_{2k}, \quad \ldots\ldots \quad x_{(m-1)k}$$

dont les arguments sont

$$0 . \frac{2k\pi}{m}, \quad 1 . \frac{2k\pi}{m}, \quad 2 . \frac{2k\pi}{m}, \quad \ldots\ldots \quad (m-1)\frac{2k\pi}{m};$$

soit x_{nk} une de ces racines ; pour obtenir celui des arguments de cette racine qui est compris entre 0 et 2π, il faut de l'arc correspondant $\frac{2nk\pi}{m}$ retrancher 2π autant de fois que possible, ce qui revient à diviser $2nk\pi$ par $2m\pi$, et par suite nk par m ; supposons qu'on ait $nk = mq + r$, on en déduit :

$$\frac{2nk\pi}{m} = 2q\pi + \frac{2r\pi}{m},$$

et la racine correspondante a pour argument moindre que 2π, $\frac{2r\pi}{m}$, et a pour indice r. Ainsi le numéro d'ordre de la racine considérée x_{nk}

est égal au reste de la division par m du nombre nk; or, k étant premier avec m, en divisant par m les m indices

$$0k,\quad 1k,\quad 2k,\ldots (m-1)k,$$

on obtient, d'après le lemme, les m nombres $0, 1, 2\ldots, m-1$, dans un certain ordre; par suite en élevant x_k aux puissances $0, 1, 2\ldots, m-1$, on obtient dans un certain ordre toutes les racines

$$x_0,\qquad x_1,\qquad x_2,\qquad \ldots..,\qquad x_{m-1}$$

de l'équation proposée.

D'ailleurs, si on élève x_k aux puissances suivantes, m, $m+1$, $m+2$, etc., on obtient des arguments qui diffèrent des premiers arguments correspondants d'un nombre entier de fois 2π, et par suite on reproduit périodiquement, et toujours dans le même ordre, les m racines de l'équation proposée.

358. **Remarque.** Les résultats précédents s'interprètent géométriquement d'une façon très simple. Considérons le cercle trigonométrique (*fig.* 103), et sur ce cercle les m points A, M_1, $M_2\ldots$, M_{m-1}, qui correspondent aux m racines (349). Elever la racine x_k aux puissances successives $0, 1, 2\ldots..$, revient à considérer successivement les racines, x_{0k}, x_{1k}, x_{2k}, etc., c'est-à-dire à joindre de k en k les sommets du polygone régulier considéré, en partant du point A; les nombres de divisions parcourues sont les différents multiples de k, et pour avoir le numéro d'ordre du sommet auquel on arrive à un moment quelconque, il suffit de retrancher du nombre total de divisions parcourues, m autant de fois que possible; ce numéro d'ordre est donc le reste de la division par m du nombre de divisions parcourues. Si k est premier avec m, on passe par tous les sommets avant de revenir au point initial A; on reproduit donc successivement toutes les racines, et on forme un polygone régulier de m sommets, étoilé ou non; en particulier, si on joint de 1 en 1, c'est-à-dire si on considère la racine x_1, on forme le polygone convexe de m côtés.

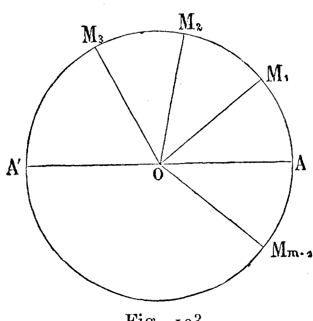


Fig. 103.

Si k n'est pas premier avec m, on reviendra au point de départ avant d'avoir parcouru tous les sommets, et si d est le plus grand commun diviseur entre m et k, on obtiendra un polygone régulier

de $\frac{m}{d}$ sommets ; si donc k n'est pas premier avec m, en élevant x_k à toutes les puissances successives, on ne reproduit que $\frac{m}{d}$ racines de l'équation binôme proposée.

Ce dernier fait se démontre trigonométriquement d'une façon très simple (Théor. IV).

359. **Théorème IV.** *Si on élève à toutes les puissances successives une racine non primitive x_k de l'équation binôme*

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0,$$

on ne reproduit que $\frac{m}{d}$ des racines de l'équation binôme proposée, d étant le plus grand commun diviseur entre m et k.

Par hypothèse, x_k n'étant pas racine primitive de l'équation proposée, k n'est pas premier avec m; si d est le plus grand commun diviseur entre m et k, on peut poser:

$$m = dm', \qquad k = dk',$$

et les nombres m' et k' sont premiers entre eux. Dès lors, on a:

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2dk'\pi}{dm'} + i\sin\frac{2dk'\pi}{dm'},$$

ou, en simplifiant :

$$x_k = \cos\frac{2k'\pi}{m'} + i\sin\frac{2k'\pi}{m'}.$$

On voit, sous cette forme, que x_k est la racine $y_{k'}$ de l'équation binôme

$$(2) \qquad y^{m'} - 1 = 0,$$

et, comme k' est premier avec m', en élevant x_k ou $y_{k'}$ à toutes les puissances successives, on reproduit périodiquement, dans un certain ordre, d'après le théorème précédent, les m' racines de l'équation (2) et on n'en reproduit pas d'autres; on ne reproduit donc que $\frac{m}{d}$ valeurs; d'ailleurs chaque racine de l'équation (2) est racine de l'équation proposée: car, par exemple,

$$y_h = \cos\frac{2h\pi}{m'} + i\sin\frac{2h\pi}{m'} = \cos\frac{2hd\pi}{m} + i\sin\frac{2hd\pi}{m} = x_{hd}.$$

360. **Corollaire I.** *Toute racine non primitive d'une équation bi-*

nôme est racine primitive d'une équation binôme dont le degré est un sous-multiple du degré de l'équation proposée.

361. **Corollaire II.** *Une racine primitive d'une équation binôme ne peut être racine d'aucune équation binôme de degré moindre.*

En effet, si x_k racine primitive de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ pouvait être racine d'une équation binôme de degré p moindre que m, en élevant cette racine à toutes les puissances successives, on ne reproduirait, au plus, que p racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ et non m.

362. **Théorème V.** *La somme des puissances semblables des racines de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ est nulle, excepté lorsque l'exposant de la puissance est un multiple de m; dans ce dernier cas la somme est égale à m.*

Nous nous proposons de calculer la somme S_p des puissances p^{es} des racines de l'équation binôme ; or x_1 étant une racine primitive, les différentes racines peuvent être représentées (356) par

$$x_1^0, \quad x_1^1, \quad x_1^2, \quad \ldots\ldots \quad x_1^{m-1};$$

on a donc :

$$\begin{aligned} S_p &= (x_1^0)^p + (x_1^1)^p + (x_1^2)^p + \quad \ldots\ldots \quad + (x_1^{m-1})^p \\ &= x_1^{0p} + x_1^{1p} + x_1^{2p} + \quad \ldots\ldots\ldots \quad + x_1^{(m-1)p}; \end{aligned}$$

si p n'est pas multiple de m, x_1^p n'est pas égal à 1, et S_p est la somme de m quantités en progression géométrique de raison x_1^p ; on a, par suite,

$$S_p = \frac{x_1^{mp} - x_1^{0p}}{x_1^p - 1} = \frac{x_1^{mp} - 1}{x_1^p - 1}.$$

Comme p n'est pas multiple de m, x_1^p est différent de 1, le dénominateur n'est pas nul, d'ailleurs $x_1{}^{mp} = (x_1{}^m)^p = 1$; donc $S_p = 0$.

Si p est multiple de m, $x_1^p = 1$, chaque terme de la somme S_p est égal à 1, et par suite $S_p = m$.

363. **Théorème VI.** *Les racines communes à deux équations binômes*

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0, \qquad (2) \quad y^n - 1 = 0,$$

sont les racines de l'équation binôme

$$(3) \qquad z^d - 1 = 0,$$

d désignant le plus grand commun diviseur entre m et n.

Je dis d'abord que si m et n sont premiers entre eux, les deux équations (1) et (2) n'ont pas de racine commune autre que l'unité.

En effet, pour que deux racines de ces deux équations

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$
$$y_{k'} = \cos\frac{2k'\pi}{n} + i\sin\frac{2k'\pi}{n}$$

soient égales, il faut, comme chacun des arguments est moindre que 2π, que ces arguments soient égaux, et par suite que l'on ait :

$$\frac{2k\pi}{m} = \frac{2k'\pi}{n}$$

d'où

$$kn = k'm.$$

Or m divise le second membre ; il devrait diviser kn, et comme il est premier avec n, il devrait diviser k, ce qui est impossible, puisque par hypothèse k est plus petit que m ; donc les racines x_k et $y_{k'}$ sont distinctes. — Il faut remarquer que la démonstration précédente suppose que k et k' ne sont pas nuls, c'est-à-dire que x_k et $y_{k'}$ ne sont pas égaux à 1.

Supposons, en second lieu, que m et n ne soient pas premiers entre eux ; soit d leur plus grand commun diviseur, et posons :

$$m = dm', \qquad n = dn',$$

m' et n' étant premiers entre eux. Pour que la racine x_k de l'équation (1) soit égale à la racine $y_{k'}$ de l'équation (2), il faut, comme les arguments sont moindres que 2π, que l'on ait $\frac{2k\pi}{m} = \frac{2k'\pi}{n}$, ou $kn = k'm$. Remplaçant m et n par leurs valeurs, et divisant par d, on devra avoir :

$$kn' = k'm' ;$$

m' étant premier avec n' et divisant kn', devra diviser k ; on devra avoir, h étant un nombre entier, $k = m'h$, et par suite $k' = n'h$; ainsi les indices k et k' devront être des équimultiples de m' et de n' ; on a alors :

$$x_k = y_{k'} = \cos\frac{2m'h\pi}{m'd} + i\sin\frac{2m'h\pi}{m'd}$$
$$= \cos\frac{2h\pi}{d} + i\sin\frac{2h\pi}{d} = z_h,$$

z_h étant la racine d'indice h de l'équation (3). Ainsi toute racine commune aux équations (1) et (2) est racine de l'équation (3).

Réciproquement, toute racine z_h de l'équation (3) est racine commune aux équations (1) et (2) ; car on a identiquement :

$$z_h = \cos\frac{2h\pi}{d} + i\sin\frac{2h\pi}{d} = \cos\frac{2m'h\pi}{m'd} + i\sin\frac{2m'h\pi}{m'd} = x_{m'h},$$

et

$$z_h = \cos\frac{2h\pi}{d} + i\sin\frac{2h\pi}{d} = \cos\frac{2n'h\pi}{n'd} + i\sin\frac{2n'h\pi}{n'd} = y_{n'h}.$$

Donc les racines communes aux équations (1) et (2) sont toutes les racines de l'équation (3), et celles-là seulement.

364. **Théorème VII.** *Si les nombres m et n sont premiers entre eux, en multipliant successivement les m racines de l'équation binôme*

(1) $$x^m - 1 = 0$$

par chacune des n racines de l'équation binôme

(2) $$y^n - 1 = 0,$$

on obtient les mn racines de l'équation binôme

(3) $$z^{mn} - 1 = 0.$$

Je dis d'abord que, quels que soient m et n, si on multiplie une racine x_k de l'équation (1) par une racine $y_{k'}$ de l'équation (2), on obtient une racine de l'équation (3) : on a en effet :

$$x_k \cdot y_{k'} = \left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)\left(\cos\frac{2k'\pi}{n} + i\sin\frac{2k'\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{2(kn+k'm)\pi}{mn} + i\sin\frac{2(kn+k'm)\pi}{mn} = z_{kn+k'm}.$$

Je dis en second lieu que, si m et n sont premiers entre eux, en multipliant successivement chacune des racines de l'équation (1) par chacune des racines de l'équation (2), on obtient toutes les racines de l'équation (3). Par ces multiplications, on obtient mn valeurs, c'est-à-dire mn racines de l'équation (3) ; pour prouver qu'on les a toutes, il suffit de démontrer que deux racines obtenues $z_{kn+k'm}$ et $z_{hn+h'm}$, où l'on n'a pas simultanément $k=h$ et $k'=h'$, sont distinctes. Pour que ces racines fussent égales, il faudrait que la différence de leurs arguments fût égale à un multiple de 2π, c'est-à-dire que l'on eût :

$$\frac{2(kn+k'm)\pi}{mn} - \frac{2(hn+h'm)\pi}{mn} = 2l\pi,$$

étant entier, ou

$$(k-h)n + (k'-h')m = lmn.$$

Or, m divisant le second membre et le second terme du premier membre, devrait diviser $(k-h)n$, et comme il est premier avec n, il devrait diviser $k-h$; si k est différent de h, ceci est impossible, puisque k et h étant moindres que m, leur différence est à fortiori moindre que m. Si $k=h$, la relation précédente se réduit à $k'-h'=ln$, et comme k' est différent de h', il faudrait que n divisât $k'-h'$, ce qui est impossible, puisque k' et h' sont moindres que n. Donc, en multipliant chacune des racines de l'équation (1) par chacune des racines de l'équation (2), on obtient toutes les racines de l'équation (3) une fois et une fois seulement.

365. **Théorème VIII.** *Si les nombres m et n sont premiers entre eux, en multipliant successivement chacune des racines primitives de l'équation*

$$(1)\qquad x^m - 1 = 0$$

par chacune des racines primitives de l'équation

$$(2)\qquad y^n - 1 = 0,$$

on obtient toutes les racines primitives de l'équation

$$(3)\qquad z^{mn} - 1 = 0.$$

Je dis d'abord que si on multiplie une racine primitive x_k de l'équation (1) par une racine primitive $y_{k'}$ de l'équation (2), la racine correspondante $z_{kn+k'm}$ de l'équation (3) est primitive, ou que son indice $kn+k'm$ est premier avec mn. Supposons en effet que $kn+k'm$ et mn aient un facteur premier commun; ce facteur divisant le produit mn diviserait un des facteurs, m par exemple; divisant m et $kn+k'm$, il diviserait kn; et comme il est premier avec n, puisque m et n sont premiers entre eux, il devrait diviser k; k et m admettraient donc un diviseur commun, et la racine x_k ne serait pas primitive, ce qui est contre l'hypothèse.

En second lieu, je dis que si on multiplie une racine non primitive x_k par une racine primitive ou non $y_{k'}$, la racine correspondante $z_{kn+k'm}$ n'est pas primitive. En effet k et m n'étant pas premiers entre eux par hypothèse, admettent un facteur commun h autre que 1; ce facteur h, divisant k et m, divise aussi $kn+k'm$; il divise d'ailleurs mn, donc $kn+k'm$ n'est pas premier avec mn et la racine $z_{kn+k'm}$ n'est pas primitive.

Ceci posé, le théorème précédent a montré que, m et n étant premiers entre eux, si on multiplie successivement les m racines de l'équation (1) par chacune des n racines de l'équation (2), on obtient toutes les racines de l'équation (3), une fois et une fois seulement;

parmi les racines ainsi obtenues se trouvent toutes les racines primitives de l'équation (3); or, d'après ce qui précède, les racines primitives de l'équation (3) ne peuvent provenir que de la multiplication d'une racine primitive de l'équation (1) par une racine primitive de l'équation (2); donc, en multipliant successivement chacune des racines primitives de l'équation (1) par chacune des racines primitives de l'équation (2), on n'obtient que des racines primitives de l'équation (3), et on les obtient toutes.

366. **Remarque.** Les deux théorèmes précédents peuvent se généraliser pour un nombre quelconque d'équations binômes, pourvu que leurs exposants soient premiers entre eux deux à deux.

367. **Corollaire I.** *Si m et n sont deux nombres entiers premiers entre eux, le nombre des racines primitives de l'équation* $z^{mn}-1=0$ *est le produit du nombre des racines primitives de l'équation* $x^m-1=0$, *par le nombre des racines primitives de l'équation* $y^n-1=0$.

368. Si on remarque que le nombre des racines primitives d'une équation binôme $x^m-1=0$ est égal au nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m, on est conduit au théorème d'arithmétique suivant :

Corollaire II. *Si on désigne par* $\varphi(m)$ *le nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m, et si m et n sont deux nombres premiers entre eux, on a*

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\times\varphi(n).$$

Plus généralement : *Si, m, n, p, ..., r, sont des nombres premiers entre eux deux à deux, et si* $\varphi(m)$ *désigne le nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m, on a :*

$$\varphi(mnp\,.....\,r)=\varphi(m)\times\varphi(n)\times\varphi(p)\times\,.....\,\varphi(r).$$

369. **Méthode pour résoudre une équation binôme.** Les théorèmes précédents permettent de ramener la résolution d'une équation binôme à la résolution de plusieurs équations binômes dont les exposants sont premiers entre eux deux à deux, et même à la recherche d'une racine primitive de chacune de ces équations. Considérons, en effet, l'équation binôme

$$(1)\qquad x^m-1=0,$$

et supposons que l'exposant m étant décomposé en facteurs premiers, on ait :

$$(2)\qquad m=a^\alpha b^\beta c^\gamma\,.....\,l^\lambda.$$

Pour résoudre l'équation (1), on considérera les équations binômes

$$(3)\qquad y^{a^\alpha}-1=0,\quad z^{b^\beta}-1=0,\quad .....\quad u^{l^\lambda}-1=0;$$



leurs exposants sont premiers entre eux deux à deux ; on prendra une racine primitive de chacune d'elles, et on fera le produit de ces racines ; on obtiendra (365) une racine primitive de l'équation

$$x^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda} - 1 = 0,$$

ou

$$x^m - 1 = 0 ;$$

en élevant cette racine primitive à toutes les puissances 0, 1, 2, ..., $m-1$, on obtiendra (356) toutes les racines de l'équation proposée.

370. **Nombre des racines primitives d'une équation binôme.** 1° Supposons que l'exposant soit une puissance d'un facteur premier, et soit l'équation

$$(1) \qquad x^{a^\alpha} - 1 = 0,$$

où a est un nombre premier. On sait que toute racine non primitive de cette équation est racine d'une équation binôme de degré sous-multiple de a^α, c'est-à-dire de l'une des équations

$$(2) \qquad y^a - 1 = 0, \quad z^{a^2} - 1 = 0, \quad t^{a^3} - 1 = 0, \quad u^{a^{\alpha-1}} - 1 = 0,$$

et que toute racine primitive de l'équation (1) n'est pas racine d'une équation de degré moindre. D'ailleurs toutes les racines de l'une quelconque des équations (2) sont racines de l'équation

$$(3) \qquad u^{a^{\alpha-1}} - 1 = 0,$$

et toute racine de cette dernière équation est racine de l'équation (1). L'équation (3) admet donc comme racines toutes les racines non primitives de l'équation (1) et celles-là seulement ; l'équation (1) admet en tout a^α racines, elle en admet $a^{\alpha-1}$ non primitives ; donc le nombre de ses racines primitives est $a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^\alpha\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Si $\varphi(m)$ désigne le nombre des racines primitives de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$, c'est-à-dire le nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m, on a donc :

$$\varphi(a^\alpha) = a^\alpha\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

2° Supposons l'exposant quelconque ; soit

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0,$$

l'équation binôme considérée, et supposons qu'en décomposant m en facteurs premiers, on ait :

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots\dots l^\lambda.$$

Le nombre des racines primitives de l'équation (1) étant le produit des nombres des racines primitives de chacune des équations binômes

$$(1) \qquad y^{a^\alpha} - 1 = 0, \quad z^{b^\beta} - 1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad u^{l^\lambda} - 1 = 0,$$

le nombre $\varphi(m)$ est donné par la formule

$$\varphi(m) = a^\alpha\left(1 - \frac{1}{a}\right) . b^\beta\left(1 - \frac{1}{b}\right) . c^\gamma\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots\ldots l^\lambda\left(1 - \frac{1}{l}\right),$$

ou

$$(3) \qquad \varphi(m) = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right);$$

c'est la formule établie en arithmétique pour le calcul du nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m.

§ II. — Polygones réguliers.

371. On sait que, si on divise une circonférence en m parties égales, et si l'on joint de k en k les points de division, on obtient, lorsque k est premier avec m, un polygone régulier inscrit de m côtés, et, lorsque m et k admettent un plus grand commun diviseur d différent de l'unité, un polygone régulier inscrit de $\frac{m}{d}$ côtés seulement. (Cours de géométrie élémentaire, nos 341 et suivants.)

On sait encore que, si on joint les points de divisions d'abord de k en k, puis de $m - k$ en $m - k$, en partant du même sommet initial, on obtient le même polygone; seulement les sommets successifs de ce polygone sont rencontrés dans le second cas en ordre inverse du premier. Il résulte de là que le nombre des polygones réguliers de m côtés est égal au nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à la moitié de m, ou, ce qui revient au même, à la moitié du nombre des nombres premiers avec m et inférieurs à m, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\varphi(m)$.

Si, par exemple, on donne successivement à m les valeurs

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 30,

on voit qu'il y a :

un triangle équilatéral, correspondant à $k = 1$,
un carré, — $k = 1$,



deux pentagones réguliers, correspondant à $k=1$, et $k=2$,
un hexagone régulier, — $k=1$,
deux octogones réguliers, — $k=1$, et $k=3$,
deux décagones réguliers, — $k=1$, et $k=3$,
deux dodécagones réguliers, — $k=1$, et $k=5$,
quatre pentédécagones réguliers, — $k=1, k=2, k=4, k=7$,
quatre polygones rég. de 30 *côtés*, — $k=1, k=7, k=11, k=13$.

372. Nous allons montrer que la détermination des côtés des polygones réguliers de m côtés se rattache à la théorie des équations binômes. Prenons pour unité de longueur le rayon de la circonférence considérée et désignons par Z_m^k le côté du polygone régulier de m sommets inscrit dans cette circonférence, obtenu en partageant la circonférence en m parties égales et en joignant les points de division de k en k, le nombre k étant supposé premier avec m.

Ce côté sous-tend un arc égal à $\frac{2k\pi}{m}$; il est par suite le double du sinus de l'arc moitié, et on a :

$$Z_m^k = 2 \sin\frac{k\pi}{m} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2k\pi}{m}}{2}} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2k\pi}{m}}.$$

Or, $\cos\frac{2k\pi}{m}$ est la partie réelle de la racine primitive x_k de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$; on voit donc que la détermination des côtés des polygones réguliers de m côtés dépend de la connaissance des racines primitives de l'équation binôme

$$x^m - 1 = 0.$$

373. On peut former, quel que soit m, une équation dont les racines sont les carrés des côtés des différents polygones réguliers de m côtés. En effet, supposons que l'on ait débarrassé l'équation binôme

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0$$

de toutes ses racines *non primitives;* on aura formé une équation

$$(2) \qquad F(x) = 0,$$

dont les racines sont les racines *primitives* de l'équation (1). Cette équation (2) qui est d'un degré égal au nombre des nombres premiers avec m et moindres que m, nombre que nous avons appelé $\varphi(m)$, est réciproque; en effet, à une racine *primitive* x_k de l'équation (1) correspond une autre racine *primitive* x_{m-k} de la même

équation, et cette dernière racine est égale à $\frac{1}{x_k}$ (350); donc à une racine x_k de l'équation (2) correspond la racine $\frac{1}{x_k}$ de la même équation, et cette équation (2) est réciproque.

Transformons cette équation réciproque en une équation de degré moitié en posant

$$y = x + \frac{1}{x};$$

nous formerons ainsi une équation

$$(3) \qquad f(y) = 0,$$

de degré égal à $\frac{1}{2}\varphi(m)$. Les racines de cette dernière équation sont les valeurs de $2\cos\frac{2k\pi}{m}$ qui entrent dans les valeurs des côtés des polygones réguliers de m côtés donnés par la formule

$$\mathbf{Z}_m^k = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2k\pi}{m}};$$

car, si l'on pose :

$$y_k = x_k + \frac{1}{x_k},$$

on a :

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$
$$\frac{1}{x_k} = \cos\frac{2k\pi}{m} - i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

d'où

$$y_k = 2\cos\frac{2k\pi}{m}.$$

On obtiendra toutes les valeurs de y_k en remplaçant successivement k par chacun des nombres entiers premiers avec m et moindres que la moitié de m.

Cela posé, si on transforme l'équation (3) en posant

$$u = 2 - y,$$

d'où

$$y = 2 - u,$$

on forme une équation en u, de degré $\frac{1}{2}\varphi(m)$, dont les racines sont les carrés des diverses valeurs de Z_m^k, c'est-à-dire les carrés des côtés des divers polygones réguliers de m côtés.

374. **Remarque I.** *Si m est pair, $\frac{m}{2}$ étant impair, l'équation*

$$(3) \qquad f(y)=0,$$

correspondant à l'équation binôme

$$x^{\frac{m}{2}}-1=0,$$

est telle que les valeurs absolues de ses racines sont les côtés des polygones réguliers de m côtés.

Observons d'abord que $\frac{m}{2}$ étant impair, les nombres 2 et $\frac{m}{2}$ sont premiers entre eux, et que, par conséquent, (368), on a :

$$\varphi(m)=\varphi\left(2\times\frac{m}{2}\right)=\varphi(2).\varphi\left(\frac{m}{2}\right)=\varphi\left(\frac{m}{2}\right);$$

il en résulte que le nombre des polygones réguliers de m côtés est $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{m}{2}\right)$, et est ainsi égal au degré de l'équation (3).

Soit k un nombre premier avec m; ce nombre est impair, et il est premier avec $\frac{m}{2}$. Le côté du polygone régulier de m côtés qui correspond à ce nombre k est donné par la formule

$$Z_m^k=2\sin\frac{k\pi}{m},$$

dans laquelle on peut remplacer $\sin\frac{k\pi}{m}$ soit par

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{m}\right)=\cos\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}-k\right)\pi}{\frac{m}{2}},$$

soit par

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{m}\right)=-\cos\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+k\right)\pi}{\frac{m}{2}}.$$

Les nombres $\frac{m}{2}$ et k étant tous deux impairs, les nombres $\frac{m}{2}-k$, $\frac{m}{2}+k$ sont pairs tous les deux; de plus, des deux nombres entiers $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}-k\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+k\right)$, l'un est pair, l'autre est impair, car la somme de ces deux nombres, $\frac{m}{2}$, est impaire par hypothèse.

Ceci posé, si c'est $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}-k\right)$ qui est pair, on pose

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}-k\right)=2h.$$

Le nombre entier h est premier avec $\frac{m}{2}$, car si un nombre entier, autre que 1, divisait $\frac{m}{2}$ et h, il diviserait k, et les nombres $\frac{m}{2}$ et k ne seraient pas premiers entre eux; de plus le nombre h est inférieur à $\frac{1}{2}\frac{m}{2}$. Or, $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}-k\right)$ étant égal à $2h$, on a :

$$Z_m^k=2\cos\frac{2h\pi}{\frac{m}{2}}=y_h,$$

et, puisque h est premier avec $\frac{m}{2}$ et moindre que $\frac{1}{2}\frac{m}{2}$, y_h est une des racines de l'équation (3) correspondant à l'équation binôme du degré $\frac{m}{2}$.

Si c'est $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+k\right)$ qui est pair, on pose :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+k\right)=2h';$$

on reconnaît encore aisément que le nombre h' est premier avec $\frac{m}{2}$ et qu'il est moindre que $\frac{1}{2}\frac{m}{2}$.

On a dans ce cas :

$$Z_m^k=-2\cos\frac{2h'\pi}{\frac{m}{2}}=-y_{h'},$$

$y_{h'}$ étant encore l'une des racines de l'équation (3). — Donc, le côté

de l'un quelconque des polygones réguliers de m côtés, m étant pair et $\frac{m}{2}$ étant impair, est égal à la valeur absolue de l'une des racines de l'équation (3). Comme d'ailleurs le degré de cette équation est égal au nombre de ces polygones, la réciproque est vraie, et par suite le fait énoncé est démontré.

375. Si m étant pair, $\frac{m}{2}$ était aussi pair, les nombres $\frac{m}{2}-k$ et $\frac{m}{2}+k$ seraient tous les deux impairs, et par suite la transformation de l'expression $\sin\frac{k\pi}{m}$ en une autre de la forme $\pm\cos\frac{2h\pi}{\frac{m}{2}}$ ne serait plus possible; on ne pourrait pas davantage transformer $\sin\frac{k\pi}{m}$ en une expression de la forme $\pm\sin\frac{2h\pi}{\frac{m}{2}}$; donc, dans ce cas, la recherche des côtés des polygones réguliers de m côtés ne se rattache pas ainsi à la résolution d'une équation binôme de degré $\frac{m}{2}$.

376. *En résumé,* il résulte de ce qui précède que, pour calculer directement les côtés des polygones réguliers de m côtés, il convient, quand m est, ou impair, ou un nombre divisible par 4, de former, comme nous l'avons expliqué au n° 373, une équation qui a pour racines les carrés des côtés cherchés.

Si m est divisible par 2, sans être divisible par 4, on pourrait encore opérer de la même façon, mais on abrège le calcul en utilisant la remarque du n° 374. On forme l'équation en y relative à l'équation binôme de degré $\frac{m}{2}$, et on prend les valeurs absolues des racines de cette équation; ces valeurs absolues sont les côtés des polygones réguliers de m côtés.

377. **Remarque II.** Si l'on a calculé préalablement les côtés des polygones réguliers de m côtés, on peut en déduire algébriquement les côtés des polygones réguliers de $2m$ côtés. Il y a deux cas à distinguer selon que m est impair ou pair.

1° m **impair.** Tout nombre premier avec $2m$ est premier avec m; mais, parmi les nombres premiers avec m, ceux-là seuls qui sont impairs sont premiers avec m. Il suit de là que, pour former la suite des nombres premiers avec $2m$ et inférieurs à la moitié de $2m$, il faut prendre, dans la suite des nombres premiers avec m et moindres que m, tous les nombres impairs.

Cela posé, soit k un nombre premier avec m et inférieur à m; le nombre $m-k$ est aussi premier avec m et inférieur à m; mais, de ces deux nombres dont la somme est le nombre impair m, l'un est pair, l'autre est impair, et, par suite, un et un seul est premier avec $2m$. A ces deux nombres, k et $m-k$, correspond un seul polygone régulier de m côtés dont le côté peut être indistinctement représenté par $\mathbf{Z}_m^k$ ou par $\mathbf{Z}_m^{m-k}$; à ces mêmes nombres correspond aussi un seul polygone régulier de $2m$ côtés, et le côté de ce polygone est $\mathbf{Z}_{2m}^k$ si k est impair, tandis qu'il est $\mathbf{Z}_{2m}^{m-k}$ si k est pair. On voit donc qu'à chaque polygone régulier de m côtés, quand m est impair, s'associe un polygone régulier de $2m$ côtés et un seul. On peut toujours supposer le nombre k moindre que la moitié de m; de cette façon, des deux arcs $\frac{2k\pi}{m}$, $\frac{2(m-k)\pi}{m}$ sous-tendus par le côté $\mathbf{Z}_m^k$, le premier est inférieur et le second supérieur à une demicirconférence. Cela étant, on reconnaît aisément que l'on a, si k est impair,

$$\left(\mathbf{Z}_{2m}^k\right)^2 = 2 - \sqrt{4 - \left(\mathbf{Z}_m^k\right)^2},$$

et, si k est pair,

$$\left(\mathbf{Z}_{2m}^{m-k}\right)^2 = 2 + \sqrt{4 - \left(\mathbf{Z}_m^k\right)^2}.$$

2° m **pair**. Dans ce cas, tout nombre premier avec $2m$ est premier avec m, et réciproquement. Il en résulte que pour former la suite des nombres premiers avec $2m$ et inférieurs à la moitié de $2m$, il faut prendre la suite complète des nombres premiers avec m et moindres que m.

Cela posé, soit k un nombre premier avec m et moindre que m; le nombre $m-k$ est aussi premier avec m et moindre que m. A ces deux nombres correspond un seul polygone de m côtés, et le côté de ce polygone peut être indistinctement représenté par $\mathbf{Z}_m^k$, ou par $\mathbf{Z}_m^{m-k}$; mais à ces deux nombres correspondent deux polygones réguliers de $2m$ côtés dont les côtés sont représentés par $\mathbf{Z}_{2m}^k$ et par $\mathbf{Z}_{2m}^{m-k}$. On voit donc qu'à chaque polygone régulier de m côtés s'associent, quand m est pair, deux polygones réguliers de $2m$ côtés. Si l'on suppose encore le nombre k inférieur à la moitié de m, ce

qui est toujours permis, on reconnaît aisément que l'on a :

$$\left(Z_{2m}^{k}\right)^2 = 2 - \sqrt{4 - (Z_m)^2},$$

et

$$\left(Z_{2m}^{m-k}\right)^2 = 2 + \sqrt{4 - \left(Z_m^k\right)^2}.$$

Nous allons appliquer ces procédés de calcul à la détermination des côtés des polygones réguliers dont le nombre des côtés est un des nombres

$$3,\ 6;\quad 4;\quad 5,\ 10;\quad 8;\quad 12;\quad 15,\ 30.$$

378. **Triangle équilatéral et hexagone régulier.** On fait $m=3$; l'équation binôme

(1) $$x^3 - 1 = 0$$

n'a qu'une racine non primitive qui est la racine 1 ; l'équation qui a pour racines les racines primitives de l'équation (1) est donc l'équation

(2) $$F(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1=0.$$

En posant

$$y = x + \frac{1}{x},$$

on forme l'équation

(3) $$f(y) = y + 1 = 0;$$

et, en posant

$$y = 2 - u,$$

on obtient l'équation

(4) $$u - 3 = 0.$$

Donc

$$Z_3^1 = \sqrt{3}.$$

379. D'après la remarque (374), le côté de l'*hexagone régulier* est la valeur absolue de la racine de l'équation (3), racine qui est égale à -1; donc

$$Z_6^1 = 1.$$

380. On arrive au même résultat en appliquant la remarque (377). D'après cette remarque, le côté de l'hexagone régulier se déduit du côté du triangle équilatéral par la formule

$$\left(Z_6^1\right)^2 = 2 - \sqrt{4 - \left(Z_3^1\right)^2},$$

ce qui donne :

$$\left(Z_6^1\right)^2 = 2 - 1 = 1,$$

d'où

$$Z_6^1 = 1.$$

381. **Carré.** On fait $m = 4$, on a l'équation binôme

$$(1) \qquad x^4 - 1 = 0$$

dont les racines non primitives sont les racines de l'équation

$$x^2 - 1 = 0.$$

Les racines *primitives* de l'équation (1) sont donc les racines de l'équation

$$(2) \qquad F(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 = 0.$$

En posant

$$y = x + \frac{1}{x},$$

on forme l'équation

$$(3) \qquad f(y) = y = 0,$$

et en posant

$$y = 2 - u,$$

on obtient l'équation

$$(4) \qquad u = 2.$$

Donc

$$Z_4^1 = \sqrt{2}.$$

382. **Pentagones réguliers et décagones réguliers.** On fait $m = 5$, on a l'équation binôme

$$(1) \qquad x^5 - 1 = 0,$$

dont la seule racine *non primitive* est la racine de l'équation

$$x - 1 = 0.$$

Les racines *primitives* de l'équation (1) sont donc les racines de l'équation

$$(2) \qquad F(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

En posant

$$y = x + \frac{1}{x},$$

on forme l'équation

$$(3) \qquad f(y) = y^2 + y - 1 = 0,$$

et en posant

$$y = 2 - u,$$

on forme l'équation

$$(4) \qquad u^2 - 5u + 5 = 0,$$

dont les racines sont

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{5 + \sqrt{5}}{2},$$

ou

$$\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}, \qquad \text{et} \qquad \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}.$$

Ces racines sont les carrés de Z_5^1 et de Z_5^2. Comme d'ailleurs Z_5^1 est moindre que Z_5^2, on a :

$$Z_5^1 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad \text{et} \qquad Z_5^2 = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

383. D'après la remarque (374), les côtés des *décagones réguliers* sont les valeurs absolues des racines de l'équation

$$(3) \qquad f(y) = y^2 + y - 1 = 0;$$

ces racines sont :

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2};$$

donc on a :

$$Z_{10}^1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad \text{et} \qquad Z_{10}^3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

384. On arrive aux mêmes résultats en appliquant la remarque du nº 377. D'après cette remarque, les côtés des deux décagones réguliers se déduisent des côtés des deux pentagones réguliers par les formules

$$\left(Z_{10}^1\right)^2 = 2 - \sqrt{4 - \left(Z_5^1\right)^2}$$

$$\left(Z_{10}^3\right)^2 = 2 + \sqrt{4 - \left(Z_5^2\right)^2};$$

ce qui donne :

$$\left(Z_{10}^1\right)^2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2,$$

d'où

$$Z_{10}^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

et

$$\left(Z_{10}^3\right)^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2,$$

d'où

$$Z_{10}^3 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

385. **Octogones réguliers.** On fait $m=8$, et on a l'équation binôme (1)

$$(1) \qquad x^8 - 1 = 0.$$

Les sous-multiples de 8 étant 1, 2, 4, les racines *non primitives* de l'équation (1) sont les racines des équations binômes

$$x - 1 = 0, \qquad x^2 - 1 = 0, \qquad x^4 - 1 = 0,$$

ou, puisque les racines des deux premières sont racines de la troisième, les racines de l'équation

$$x^4 - 1 = 0.$$

Les racines *primitives* de l'équation (1) sont donc les racines de

l'équation

$$(2) \qquad F(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} = x^4 + 1 = 0.$$

En posant

$$y = x + \frac{1}{x},$$

on a l'équation

$$(3) \qquad f(y) = y^2 - 2 = 0;$$

en posant

$$y = 2 - u,$$

on obtient l'équation

$$(4) \qquad u^2 - 4u + 2 = 0,$$

dont les racines sont

$$2 - \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad 2 + \sqrt{2}.$$

Comme Z_8^1 est inférieur à Z_8^3, on a :

$$Z_8^1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \text{et} \quad Z_8^3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

386. On aurait pu, d'après la remarque du nº 377, déduire les côtés des deux octogones réguliers du côté du carré que l'on sait égal à $\sqrt{2}$ (381). On a en effet :

$$(Z_8^1)^2 = 2 - \sqrt{4 - (Z_4^1)^2} = 2 - \sqrt{2},$$

d'où

$$Z_8^1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

et

$$(Z_8^3)^2 = 2 + \sqrt{4 - (Z_4^1)^2} = 2 + \sqrt{2},$$

d'où

$$Z_8^3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

387. **Dodécagones réguliers.** On fait $m = 12$, et on a l'équa-

tion binôme

$$(1) \qquad x^{12} - 1 = 0.$$

Les sous-multiples de 12 étant 1, 2, 3, 4, 6, les racines *non primitives* de l'équation (1) sont les racines des équations

$$x - 1 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - 1 = 0, \quad x^4 - 1 = 0, \quad x^6 - 1 = 0.$$

Les racines des deux premières sont racines de la quatrième, les racines de la troisième sont racines de la cinquième; nous n'avons donc à considérer que les deux dernières équations; celles-ci ont deux racines communes $+1$ et -1, et n'en ont pas d'autre; donc les racines non primitives de l'équation (1) sont les racines de l'équation

$$\frac{(x^4 - 1)(x^6 - 1)}{(x^2 - 1)} = (x^2 + 1)(x^6 - 1) = 0.$$

Il en résulte que l'équation dont les racines sont les racines *primitives* de l'équation (1) est l'équation

$$(2) \qquad F(x) = \frac{x^{12} - 1}{(x^2 + 1)(x^5 - 1)} = x^4 - x^2 + 1 = 0.$$

En posant

$$y = x + \frac{1}{x},$$

on obtient l'équation en y

$$(3) \qquad f(y) = y^2 - 3 = 0,$$

et en posant

$$y = 2 - u,$$

on forme l'équation en u

$$(4) \qquad u^2 - 4u + 1 = 0$$

dont les racines

$$2 \pm \sqrt{3}$$

sont les carrés des côtés des deux dodécagones.

Comme d'ailleurs Z_{12}^1 est moindre que Z_{12}^5, on a :

$$Z_{12}^1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \qquad \text{et} \qquad Z_{12}^5 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

388. On aurait pu, d'après la remarque du n° 377, déduire les côtés des deux dodécagones réguliers du côté de l'hexagone régulier que l'on sait égal à 1, (379). On a en effet :

$$\left(Z_{12}^{1}\right)^{2}=2-\sqrt{4-\left(Z_{6}^{1}\right)^{2}}=2-\sqrt{3},$$

d'où

$$Z_{12}^{1}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

et

$$\left(Z_{12}^{5}\right)^{2}=2+\sqrt{4-\left(Z_{6}^{1}\right)^{2}}=2+\sqrt{3},$$

d'où

$$Z_{12}^{5}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

389. **Pentédécagones réguliers et polygones réguliers de 30 côtés.** On fait $m=15$, on a l'équation binôme

$$(1) \qquad x^{15}-1=0.$$

Les sous-multiples de 15 étant 1, 3, 5, les racines *non primitives* de l'équation (1) sont les racines des équations binômes

$$x-1=0, \qquad x^{3}-1=0, \qquad x^{5}-1=0;$$

comme ces équations, prises deux à deux, ont une racine commune $+1$, et n'en ont pas d'autre, les racines non primitives de l'équation (1) sont les racines de l'équation

$$(x^{2}+x+1)(x^{5}-1)=0.$$

Il suit de là que les racines *primitives* de l'équation (1) sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad F(x)=\frac{x^{15}-1}{(x^{2}+x+1)(x^{5}-1)}=x^{8}-x^{7}+x^{5}-x^{4}+x^{3}-x+1=0.$$

En posant

$$y=x+\frac{1}{x},$$

on forme l'équation

$$(3) \qquad f(y)=y^{4}-y^{3}-4y^{2}+4y+1=0.$$

Enfin, en remplaçant dans cette dernière équation y par $2-u$,

on forme l'équation

$$(4) \qquad u^4 - 7u^3 + 14u^2 - 8u + 1 = 0,$$

dont les racines sont les carrés des côtés des quatre pentédécagones réguliers.

Résolvons cette équation par la méthode de Ferrari. A cet effet, mettons-la sous la forme

$$(5) \qquad \left(u^2 - \frac{7}{2}u + \lambda\right)^2 - \left[\left(2\lambda - \frac{7}{4}\right)u^2 - (7\lambda - 8)u + \lambda^2 - 1\right] = 0,$$

et disposons de λ de façon que

$$\left(2\lambda - \frac{7}{4}\right)u^2 - (7\lambda - 8)u + \lambda^2 - 1$$

soit un carré. La condition est

$$(7\lambda - 8)^2 - 4\left(2\lambda - \frac{7}{4}\right)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

ou

$$8\lambda^3 - 56\lambda^2 + 104\lambda - 57 = 0.$$

Or, cette équation du 3e degré en λ admet la racine commensurable $\frac{3}{2}$. Donc, en remplaçant λ par $\frac{3}{2}$ dans l'équation (5), nous mettrons l'équation (4) sous la forme

$$\left(u^2 - \frac{7}{2}u + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}(u - 1)^2 = 0,$$

ou

$$(2u^2 - 7u + 3)^2 - 5(u - 1)^2 = 0,$$

ou encore

$$\left[2u^2 - (7 - \sqrt{5})u + 3 - \sqrt{5}\right]\left[2u^2 - (7 + \sqrt{5})u + 3 + \sqrt{5}\right] = 0.$$

De cette façon la résolution de l'équation (4) est ramenée à la résolution des deux équations du second degré (α) et (β)

$$(\alpha) \qquad 2u^2 - (7 - \sqrt{5})u + 3 - \sqrt{5} = 0,$$
$$(\beta) \qquad 2u^2 - (7 + \sqrt{5})u + 3 + \sqrt{5} = 0.$$

Les racines de la première sont :

$$u'_\alpha = \frac{1}{4}\left[7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right], \quad u''_\alpha = \frac{1}{4}\left[7-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right];$$

les racines de la seconde sont

$$u'_\beta = \frac{1}{4}\left[7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right], \quad u''_\beta = \frac{1}{4}\left[7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}\right].$$

De ces quatre racines, il est évident que la plus petite est u'_α, et que la plus grande est u''_β. Si l'on compare les deux autres, u''_α et u'_β, en écrivant que l'une des deux est inférieure à l'autre, on reconnaît facilement que c'est u' qui est la plus petite, de sorte que l'on a :

$$u'_\alpha < u'_\beta < u''_\alpha < u''_\beta.$$

D'autre part les côtés $Z^1_{15}, Z^2_{15}, Z^4_{15}, Z^7_{15}$ des quatre pentédécagones étant aussi rangés par ordre de grandeurs croissantes, on a :

$$Z^1_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$Z^2_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$$

$$Z^4_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$Z^7_{15} = \frac{1}{2}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}.$$

En appliquant la transformation connue

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

on voit que

$$\sqrt{7-\sqrt{5}\pm\sqrt{30-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \pm \sqrt{\frac{9-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm \left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\right]$$

$$\sqrt{7+\sqrt{5}\pm\sqrt{30+6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{15}+\sqrt{3} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$

on en conclut qu'on peut encore écrire comme il suit les valeurs des côtés des quatre pentédécagones réguliers,

$$Z_{15}^{1}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right]$$
$$Z_{15}^{2}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]$$
$$Z_{15}^{4}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right]$$
$$Z_{15}^{7}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

390. D'après la remarque (374), les côtés des polygones réguliers de 30 côtés sont les valeurs absolues des racines de l'équation

$$(3) \qquad f(y)=y^4-y^3-4y^2+4y+1=0$$

relative à l'équation binôme de degré 15.

Pour résoudre cette équation, on peut, en appliquant la méthode de Ferrari, la mettre sous la forme

$$\left(y^2-\frac{1}{2}y+\lambda\right)^2-\left(\frac{17}{4}+2\lambda\right)y^2+(\lambda+4)y-(\lambda^2-1)=0,$$

et disposer de λ de façon que le trinôme

$$\left(\frac{17}{4}+2\lambda\right)y^2-(\lambda+4)y+\lambda^2-1$$

soit un carré. L'équation de condition est

$$(\lambda+4)^2-(\lambda^2-1)(17+8\lambda)=0,$$

ou

$$8\lambda^3+16\lambda^2-16\lambda-33=0.$$

Cette équation du troisième degré en λ admet la racine commensurable $-\frac{3}{2}$; pour cette valeur de λ, le trinôme

$$\left(\frac{17}{4}+2\lambda\right)y^2-(\lambda+4)y+\lambda^2-1$$

est égal à

$$\frac{5}{4}(y-1)^2,$$

et l'équation (3) devient

$$\left(y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}(y-1)^2=0,$$

ou

$$(2y^2-y-3)^2-5(y-1)^2=0.$$

Or cette dernière peut se décomposer dans les deux équations du second degré

$$2y^2-(1+\sqrt{5})y-3+\sqrt{5}=0$$
$$2y^2-(1-\sqrt{5})y-3-\sqrt{5}=0.$$

Chacune de ces équations admet une racine positive et une racine négative. En prenant les valeurs absolues de ces quatre racines, et en les rangeant par ordre de grandeurs croissantes, on voit que l'on a :

$$Z_{30}^{1}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right]$$
$$Z_{30}^{7}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right]$$
$$Z_{30}^{11}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right]$$
$$Z_{30}^{13}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right].$$

391. On pourrait encore, d'après la remarque du n° 377, déduire les côtés des polygones réguliers de 30 côtés des côtés des polygones réguliers de 15 côtés supposés connus. On aurait les formules

$$\left(Z_{30}^{1}\right)^2=2-\sqrt{4-\left(Z_{15}^{1}\right)^2},$$
$$\left(Z_{30}^{13}\right)^2=2+\sqrt{4-\left(Z_{15}^{2}\right)^2},$$
$$\left(Z_{30}^{11}\right)^2=2+\sqrt{4-\left(Z_{15}^{4}\right)^2},$$
$$\left(Z_{30}^{7}\right)^2=2-\sqrt{4-\left(Z_{15}^{7}\right)^2};$$

mais l'application de ces formules conduirait à des calculs plus longs et plus compliqués que les précédents.

392. On peut remarquer que les côtés des polygones réguliers de 30 côtés sont liés d'une facon très simple aux côtés des décagones réguliers. On a en effet :

$$Z_{30}^{11}-Z_{30}^{1}=Z_{10}^{3}, \qquad Z_{30}^{11}\times Z_{30}^{1}=\left(Z_{10}^{1}\right),$$

et

$$Z_{30}^{13}-Z_{30}^{7}=Z_{10}^{1}, \qquad Z_{30}^{13}\times Z_{30}^{7}=\left(Z_{10}^{3}\right).$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV.

1. On remplace, dans l'expression $(x+a)^m$, la lettre a successivement par les m racines m^{mes} de l'unité; démontrer que la somme de ces résultats est égale à $m(x^m+1)$.

(Ecole polytechnique, Examen oral.)

2. Soit $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ un nombre dont les facteurs premiers sont $a, b, c \ldots l$; démontrer que l'équation qui a pour racines les racines primitives de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ est l'équation

$$\frac{\left(x^m - 1\right) \times \left(x^{\frac{m}{ab}} - 1\right)\left(x^{\frac{m}{ac}} - 1\right) \ldots\ldots \times \left(x^{\frac{m}{abcd}} - 1\right)\ldots\ldots}{\left(x^{\frac{m}{a}} - 1\right)\left(x^{\frac{m}{b}} - 1\right)\ldots\ldots \times \left(x^{\frac{m}{abc}} - 1\right)\ldots\ldots} = 0,$$

les facteurs binômes qui figurent au numérateur ayant respectivement pour degrés m et les quotients que l'on obtient en divisant m par les produits des facteurs premiers $a, b, c \ldots l$, pris deux à deux, quatre à quatre, six à six, etc., tandis que les degrés des facteurs binômes qui figurent au dénominateur sont les quotients de m par les produits des mêmes facteurs premiers pris un à un, trois à trois, cinq à cinq, etc.; vérifier d'ailleurs que cette équation est d'un degré égal au degré de l'équation demandée.

3. Ayant résolu algébriquement les équations binômes $x^3 - 1 = 0$, $x^5 - 1 = 0$, reconnaître les racines primitives de ces deux équations et les indices de chacune de ces racines, puis former les racines primitives d'indices 1, 2, 4, 7, de l'équation binôme $x^{15} - 1 = 0$; ces calculs faits, en partant de la formule

$$Z_m^k = 2 \sin \frac{k\pi}{m},$$

former successivement les valeurs de

$$Z_3^1,\quad Z_6^1;\qquad Z_5^1,\quad Z_5^2;\qquad Z_{10}^1,\quad Z_{10}^3;\qquad Z_{15}^1,\quad Z_{15}^2,\quad Z_{15}^4,\quad Z_{15}^7;$$

et vérifier que ces résultats concordent avec ceux précédemment établis d'une autre façon.

4. Former l'équation qui admet comme racines les carrés des côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés, calculer les valeurs de ces côtés, et vérifier que ces valeurs sont les mêmes que celles trouvées d'une autre façon au n° 390.



CHAPITRE V.

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

§ I. Relations fondamentales entre les éléments d'un triangle sphérique quelconque. — § II. Relations particulières relatives à un triangle sphérique rectangle. — § III. Résolution des triangles sphériques rectangles. — § IV. Résolution des triangles sphériques obliquangles au moyen de triangles rectangles. — § V. Applications de trigonométrie sphérique.

§ I. — Relations fondamentales entre les éléments d'un triangle sphérique quelconque.

393. On appelle *angle de deux arcs de grand cercle* AB, AC, tracés sur une sphère, l'angle RAS des tangentes AR, AS à ces arcs au point A (*fig.* 104); de cette définition résultent deux manières de mesurer cet angle; si on remarque que les tangentes AR, AS sont perpendiculaires au rayon OA et sont situées l'une dans le plan OAB, l'autre dans le plan OAC, l'angle RAS est l'angle plan de l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles; d'autre part, si, du point A comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadrant, on décrit sur la sphère l'arc de grand cercle BC, cet arc est dans le plan mené par le centre perpendiculairement à OA; il mesure l'angle BOC qui est égal à l'angle RAS, et, par conséquent, il mesure l'angle des arcs de grand cercle AB, AC.

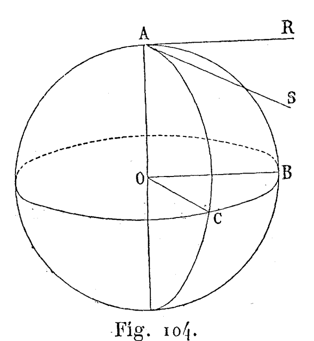


Fig. 104.

394. On appelle *triangle sphérique* la plus petite des portions de la surface d'une sphère, déterminées par trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, moindres chacun qu'une demi-circonférence et limités à leurs intersections deux à deux (*fig.* 105). Les points A, B, C, sont les sommets du triangle; les arcs AB, BC, CA, sont les côtés, et les angles CAB, ABC, BCA, qu'ils forment entre eux sont les angles du

triangle sphérique ABC. Si l'on prend pour unité de longueur le rayon de la sphère, et pour unité d'arc l'arc de grand cercle de longueur égale à l'unité de longueur, chacun des côtés du triangle sphérique est compris entre o et π, et la mesure de chacun des angles est comprise également entre o et π.

Si l'on joint le centre O d'une sphère aux sommets A, B, C, d'un triangle sphérique ABC tracé sur cette sphère, on forme un trièdre OABC (*fig.* 105) dont les faces sont mesurées par les côtés du triangle sphérique, et dont les angles dièdres sont mesurés par les angles du triangle sphérique; réciproquement étant donné un trièdre, si on le coupe par une sphère ayant pour centre le sommet du trièdre et d'un rayon quelconque, le trièdre détache sur la sphère un triangle sphérique. Dès lors, à toute propriété des trièdres correspond une propriété des triangles sphériques, et réciproquement.

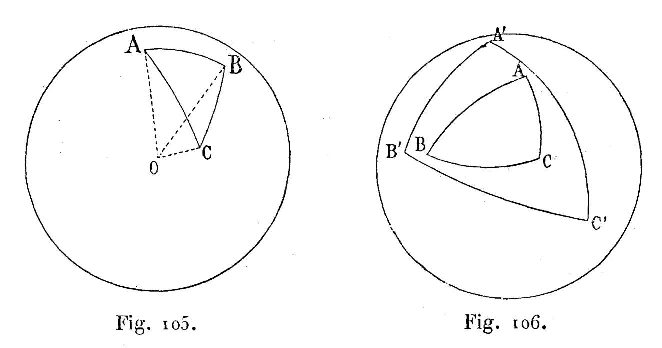


Fig. 105. Fig. 106.

On conclut ainsi que, dans un triangle sphérique, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres, et que la somme des trois côtés est comprise entre o et 2π.

395. On appelle *triangle polaire* d'un triangle sphérique ABC un triangle sphérique A'B'C', tel que chaque sommet du second triangle est pôle d'un côté du premier, et se trouve, par rapport au grand cercle auquel appartient ce côté, dans l'hémisphère qui contient le sommet opposé à ce côté; ainsi le sommet A', par exemple, doit être celui des pôles du côté BC qui est situé, par rapport au grand cercle auquel appartient le côté BC, dans l'hémisphère contenant le sommet A (*fig.* 106). On démontre que réciproquement le triangle ABC est le triangle polaire du triangle A'B'C'. On démontre encore que deux triangles polaires ABC, A'B'C', sont tels que la somme d'un côté de l'un et de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle correspondant de l'autre est égale à une demi-circonférence de

grand cercle. Il résulte de là que, dans tout triangle sphérique, le plus petit angle, augmenté de π, est plus grand que la somme des deux autres, et que la somme des trois angles est comprise entre π et 3π.

Si l'on joint le centre de la sphère respectivement aux sommets de deux triangles sphériques polaires ABC, A′B′C′, on obtient deux trièdres supplémentaires.

396. Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que l'on a choisi pour unité de longueur le rayon de la sphère considérée, et pour unité d'arc l'arc de grand cercle de cette sphère dont la longueur est égale au rayon. Si ABC est un triangle sphérique tracé sur cette sphère, nous représenterons par a, b, c, les longueurs des côtés opposés aux angles A, B, C, du triangle, et par A, B, C, les longueurs des arcs de grand cercle qui mesurent les angles de même nom du triangle. Ces six quantités se nomment les éléments du triangle.

Un triangle sphérique, appartenant à une sphère de rayon donné, est déterminé dès que l'on connaît trois quelconques de ses six éléments; il n'est pas nécessaire, comme pour les triangles rectilignes, que parmi les données se trouve un côté. On peut, au moyen de constructions graphiques exécutées sur la sphère, construire un triangle sphérique connaissant trois quelconques des six éléments (Cours de géométrie élémentaire, nos 903 à 911); mais ces constructions graphiques ne sont pas susceptibles d'une grande précision, et les éléments inconnus ne sont pas obtenus avec une approximation très grande. Aussi convient-il, comme pour les triangles rectilignes, étant donnés trois éléments d'un triangle sphérique, de calculer les trois autres; c'est ce qu'on appelle *résoudre* le triangle.

L'ensemble des formules qui lient les six éléments d'un triangle sphérique, et leur application à la résolution de ces triangles, constituent *la trigonométrie sphérique*.

Les formules fondamentales que nous allons établir et dont on déduit toutes les autres sont de plusieurs espèces, et chacune d'elles lie entre elle quatre des six éléments du triangle.

397. **Théorème.** *Dans un triangle sphérique, le cosinus d'un côté quelconque est égal au produit des cosinus des deux autres côtés, augmenté du produit des sinus de ces deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Soit ABC un triangle sphérique tracé sur la sphère de centre O et de rayon égal à l'unité de longueur (*fig.* 107); je me propose d'établir la relation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$



Joignons le centre O de la sphère aux trois sommets du triangle, et menons au point A les tangentes AR, AS aux deux arcs de grand cercle AB, AC; l'angle de ces deux tangentes est l'angle A du triangle sphérique. Ceci posé, abaissons du point C, dans le plan AOC, la perpendiculaire CH sur OA; soit H son pied sur OA; si, dans le plan AOC, on prend A pour origine des arcs, et si l'on prend, sur le grand cercle AC, le sens AC comme sens positif des arcs, le sinus de l'arc AC, $\sin b$, est positif, puisque l'arc b est moindre que π, et il est égal à $+$ HC, ou au segment $\overline{HC}$, puisque ce segment est positif dans le sens AS et est négatif en sens con-

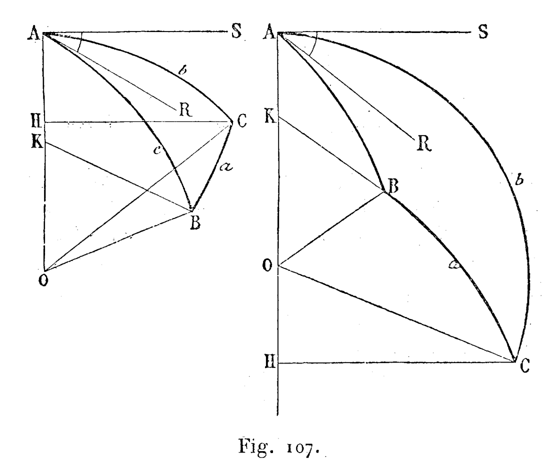


Fig. 107.

traire; le cosinus de l'arc AC, $\cos b$, est égal à $+$OH ou à $-$OH, suivant que pour aller de O en H on s'éloigne du point O dans le sens OA ou dans le sens contraire, c'est-à-dire est égal au segment $\overline{OH}$. Projetons orthogonalement sur OB les deux contours OC et OHC; d'après le théorème des projections (72), on a :

$$(OC) = (OH) + (HC).$$

Mais

$$(OC) = 1 \,.\, \cos a \qquad\qquad = \cos a$$
$$(OH) = \cos b \,.\, \cos(OA, OB) = \cos b \,.\, \cos c$$
$$(HC) = \sin b \,.\, \cos(HC, OB) = \sin b \,.\, \cos(AS, OB);$$

on a donc

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \cos(AS, OB).$$

Abaissons du point B la perpendiculaire BK sur OA, et soit K son pied ; si, dans le plan AOB, on choisit le point A comme origine des arcs sur le grand cercle AB, et si on prend comme sens positif des arcs le sens de A vers B, le sinus de l'arc AB, $\sin c$, est égal au segment $\overline{KB}$, le cosinus de l'arc AB, $\cos c$, est égal au segment $\overline{OK}$. Projetons orthogonalement sur AS les deux contours OB et OKB qui ont mêmes extrémités ; nous aurons :

$$(OB) = (OK) + (KB).$$

Or

$$(OB) = 1 . \cos(AS, OB) \qquad = \cos(AS, OB)$$
$$(OK) = \cos c . \cos(OA, AS) = 0$$
$$(KB) = \sin c . \cos(AR, AS) = \sin c . \cos A ;$$

on a donc :

$$\cos(AS, OB) = \sin c . \cos A,$$

et, en remplaçant dans la relation (1), on a la formule

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

qu'il s'agissait d'établir.

398. Si l'on applique la relation précédente successivement aux trois côtés du triangle, on a le groupe des trois formules :

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{array} \right.$$

399. **Remarque.** Puisqu'un triangle sphérique est déterminé dès que l'on connaît trois de ses six éléments, il existe entre ces six éléments trois relations distinctes et trois seulement ; les équations (α) sont trois relations distinctes ; dès lors toutes les relations que l'on peut obtenir entre les six éléments d'un triangle sphérique peuvent être déduites des formules (α) par des transformations algébriques.

400. **Théorème.** *Dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés,*

$$(\beta) \qquad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Ces relations se déduisent facilement des équations (α) ; supposons par exemple que nous voulions démontrer que l'on a :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Cette relation étant indépendante de c et de C, il faut, pour l'obtenir, éliminer c et C entre les trois équations (α); les deux premières étant indépendantes de C, il suffit entre ces deux-là d'éliminer c. En les ajoutant et les retranchant, on a :

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin b \cos A + \sin a \cos B)$$
$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos A - \sin a \cos B).$$

Multiplions membre à membre, et remplaçons $\sin^2 c$ par $1 - \cos^2 c$, nous obtenons :

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B$$

ou

$$\sin^2 b - \sin^2 a = \sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B,$$

ou enfin

$$\sin^2 b \sin^2 A = \sin^2 a \sin^2 B;$$

mais a, b, A, B, sont compris entre 0 et π; leurs sinus sont positifs; nous aurons donc, en extrayant les racines carrées des deux membres et en égalant les valeurs arithmétiques de ces racines,

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B,$$

ou

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

ce qu'il fallait démontrer.

401. *Démonstration directe.* On peut établir directement la re-

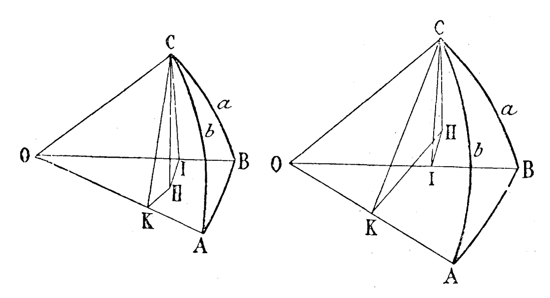


Fig. 108.

lation précédente; soit ABC le triangle, et soit O le centre de la sphère : joignons le point O aux trois sommets (*fig.* 108), et du point C abaissons la perpendiculaire CH sur le plan AOB, puis du point H les perpendiculaires HK, HI sur les rayons OA et OB; enfin joignons

le point C aux points K et I ; d'après le théorème des trois perpendiculaires, CK, CI sont respectivement perpendiculaires sur OA et sur OB, et par suite les angles CKH, CIH sont les rectilignes des angles dièdres OA, OB du trièdre OABC, ou les suppléments de ces rectilignes, suivant que ces angles dièdres sont aigus ou obtus. Dans tous les cas, les deux triangles rectangles CHK, CHI donnent

$$\mathrm{CH} = \mathrm{CK} \sin \widehat{\mathrm{CKH}} = \mathrm{CI} . \sin \widehat{\mathrm{CIH}};$$

or, $\mathrm{CK} = \sin b$, $\mathrm{CI} = \sin a$, car ces sinus sont positifs; d'ailleurs $\sin \widehat{\mathrm{CKH}}$ est égal à $\sin \mathrm{A}$, si A est aigu, à $\sin (\pi - \mathrm{A})$ ou encore à $\sin \mathrm{A}$, si A est obtus; de même que $\sin \widehat{\mathrm{CIH}} = \sin \mathrm{B}$, dans tous les cas ; on a donc :

$$\sin b \sin \mathrm{A} = \sin a \sin \mathrm{B},$$

ou

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}},$$

et cette formule est générale.

402. **Corollaire I.** On peut, des formules (α) et (β), déduire de nombreuses formules utiles dans la résolution des triangles. En particulier, proposons-nous d'obtenir une relation entre deux côtés, l'angle compris entre ces côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, par exemple entre a, b, C et A. Il faut déduire des relations (α) et (β), une relation indépendante de c et de B ; or la première et la troisième des relations (α) sont indépendantes de B, ainsi que la relation

$$\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}; \tag{1}$$

tout revient donc à trouver, au moyen de ces trois équations, une formule indépendante de c. Dans la première des relations (α), remplaçons $\cos c$ par sa valeur $\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \mathrm{C}$, tirée de la dernière relation (α), $\sin c$ par la valeur $\frac{\sin a \sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}}$ déduite de la relation (1), et nous aurons :

$$\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \mathrm{C}) + \sin b \sin a \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}} \cos \mathrm{A},$$

ou

$$\cos a \sin^2 b = \cos b \sin a \sin b \cos \mathrm{C} + \sin a \sin b \sin \mathrm{C} \cot \mathrm{A},$$



ou enfin, en divisant par $\sin a \sin b$,

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A;$$

c'est la relation cherchée.

403. Cette relation, sous cette forme, n'est pas facile à retenir; on peut la transformer, en divisant les deux membres par $\cos b \cos C$, et en faisant passer le dernier terme du second membre dans le premier; elle devient alors :

$$\frac{\cot a}{\cot b} \cdot \frac{1}{\cos C} - \frac{\cot A}{\cot C} \cdot \frac{1}{\cos b} = 1;$$

si l'on remarque alors que, dans le triangle, les éléments

$$a, \ C, \ b, \ A,$$

sont consécutifs, la formule précédente peut s'énoncer : *Dans un triangle sphérique, le rapport des cotangentes de deux côtés divisé par le cosinus de l'angle compris, moins le rapport des cotangentes des deux angles pris en ordre inverse, divisé par le cosinus du côté compris, est égal à l'unité.*

404. Par analogie et par des permutations circulaires, on peut déduire, de cette formule, cinq autres relations, et on obtient ainsi le système des six équations :

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A \\ \cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C \\ \cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

405. **Corollaire II.** Proposons-nous d'obtenir une relation entre les trois angles et un côté, a par exemple. Il faut déduire des formules (α) et (β) une relation indépendante de b et de c; pour cela, dans la première et dans la seconde des formules (α) remplaçons $\cos c$ par sa valeur tirée de la troisième, nous aurons :

$$\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b = \cos a (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B,$$

ou

$$\cos a \sin^2 b = [\cos b \sin a \cos C + \sin c \cos A] \sin b$$
$$\cos b \sin^2 a = [\cos a \sin b \cos C + \sin c \cos B] \sin a;$$

en simplifiant et en remplaçant ensuite $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, dans ces



relations homogènes par rapport à ces trois quantités, par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C, nous aurons :

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \sin C \cos A$$
$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

Il nous reste à éliminer b entre ces deux relations; il suffit de remplacer dans la première $\cos b \sin A$ par sa valeur tirée de la seconde ; on a :

$$\cos a \sin B = \cos a \sin B \cos^2 C + \sin C \cos B \cos C + \sin C \cos A,$$

ou, en réunissant les deux termes en $\cos a$ et en divisant par sin C,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

406. Par des permutations circulaires, on déduit deux autres relations, et on obtient ainsi le groupe (δ)

$$(\delta) \quad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

407. *Autre démonstration.* Ces formules (δ) peuvent se déduire plus simplement des relations (α) au moyen de la considération des triangles polaires. Soient a', b', c', A', B', C', les éléments du triangle polaire du triangle donné; on sait que ces éléments sont liés aux éléments du triangle donné par les relations

$$a' = \pi - A, \qquad b' = \pi - B, \qquad c' = \pi - C,$$
$$A' = \pi - a, \qquad B' = \pi - b, \qquad C' = \pi - c.$$

Appliquons au triangle polaire la première des formules (α); nous aurons :

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A';$$

en remplaçant a', b', c' et A' par leurs valeurs et en changeant les signes, nous obtenons la relation

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

c'est la première des formules (δ); on en déduit les autres par permutation circulaire.

408. **Corollaire III.** Les formules (α) permettent de calculer les angles d'un triangle sphérique connaissant les trois côtés; mais ces formules ne sont pas calculables par logarithmes; on peut, par un calcul analogue au calcul fait en trigonométrie rectiligne, déduire de ces formules, des formules calculables par logarithmes.

De la première relation (α), on tire :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

d'où

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c};$$

posons

$$a + b + c = 2p,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b - c = 2(p - c) \\ a + c - b = 2(p - b) \\ b + c - a = 2(p - a), \end{array} \right.$$

et remarquons que $1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$; nous aurons :

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin b \sin c},$$

et comme $\frac{A}{2}$ est moindre que $\frac{\pi}{2}$, que par suite son sinus est positif,

$$(1) \qquad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin b \sin c}}.$$

En formant la somme $1 + \cos A$, on obtient de même :

$$(2) \qquad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p - a)}{\sin b \sin c}}.$$

En divisant membre à membre, on a enfin :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin p \sin (p - a)}},$$

formule calculable par logarithmes.

Par permutation circulaire, on obtient deux autres relations, et on a ainsi le groupe des trois relations

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin p \sin (p - a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - c) \sin (p - a)}{\sin p \sin (p - b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - a) \sin (p - b)}{\sin p \sin (p - c)}}. \end{array} \right.$$

409. **Corollaire IV.** Si on applique les formules précédentes (1), (2) et (3) au triangle polaire du triangle donné, et si on y remplace ensuite les éléments du triangle polaire par leurs valeurs en fonction des éléments du triangle donné, on obtient les expressions des côtés du triangle donné en fonction de ses angles ; posons :

$$2S = A + B + C - \pi;$$

nous aurons :

$$\left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin B \sin C}} \\ \sin\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin S \sin(A-S)}{\sin B \sin C}} \\ \cot\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S \sin(A-S)}}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se déduire directement des formules (δ) par un calcul analogue au calcul du numéro précédent.

410. **Remarque.** Les formules fondamentales de trigonométrie rectiligne établies aux n°s 184 et 187 peuvent être déduites des formules (α) et (β) de trigonométrie sphérique que nous venons d'établir. Il suffit pour cela de supposer d'abord qu'au lieu de prendre pour unité de longueur le rayon de la sphère à laquelle appartient le triangle sphérique considéré, on prenne une unité de longueur tout à fait arbitraire, qu'ensuite on fasse croître indéfiniment le rayon de la sphère, de manière toutefois que l'on conserve une grandeur constante à trois des éléments du triangle sphérique tels que parmi eux se trouve au moins un côté et que l'on puisse, avec les éléments supposés fixes, construire un triangle rectiligne; le plan peut être regardé comme la limite de la sphère; les arcs de grand cercle, côtés du triangle sphérique, deviennent des portions de droite, et le triangle sphérique a pour limite un triangle rectiligne.

Soit ABC un triangle sphérique, et supposons que, faisant croître indéfiniment le rayon de la sphère sur laquelle il est tracé, nous laissions fixes comme grandeurs les côtés AC, AB et l'angle compris BAC. Avec ces éléments, nous pouvons toujours construire un triangle rectiligne A'B'C', tel que $A'C' = AC$, $A'B' = AB$, soient deux de ses côtés, et que l'angle B'A'C', égal à l'angle BAC, soit l'angle compris. Je me propose de déduire des formules de trigonométrie sphérique (α) et (β) appliquées au triangle sphérique ABC les formules de trigonométrie rectiligne qui lient les côtés et les angles du triangle rectiligne A'B'C'.

Prenons une unité de longueur indépendante du rayon de la sphère à laquelle appartient le triangle ABC, et soient α, β, γ, R, les mesures, avec cette unité, des côtés du triangle sphérique ABC et du rayon de la sphère; soient toujours A, B, C, les mesures des angles du triangle sphérique dans un cercle de rayon égal à l'unité de longueur. Puisque a, b, c, sont les mesures des côtés du triangle sphérique, lorsque le rayon de la sphère est pris pour unité de longueur, on a :

$$(1) \qquad a=\frac{\alpha}{R}, \qquad b=\frac{\beta}{R}, \qquad c=\frac{\gamma}{R}.$$

Soient a', b', c', les mesures des côtés du triangle rectiligne A′B′C′ avec la même unité de longueur; soient A′, B′, C′, les mesures de ses angles dans un cercle de rayon 1. On a, par hypothèse,

$$b'=\beta, \qquad c'=\gamma, \qquad A'=A,$$

d'ailleurs a', B′, C′, sont respectivement les limites de a, B, C.

411. Considérons les formules (α) de trigonométrie sphérique (398) et cherchons ce que deviennent ces formules lorsque R croît indéfiniment, les grandeurs de β, de γ et de A restant fixes. Prenons d'abord la relation

$$\cos a=\cos b\ \cos c+\sin b\ \sin c\ \cos A;$$

remplaçons-y $\cos a$ par $1-2\sin^2\frac{a}{2}$, $\cos b$ par $1-2\sin^2\frac{b}{2}$, $\cos c$ par $1-2\sin^2\frac{c}{2}$; nous aurons, en développant le second membre et en simplifiant,

$$2\sin^2\frac{a}{2}=2\sin^2\frac{b}{2}+2\sin^2\frac{c}{2}-4\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}-\sin b\ \sin c\ \cos A,$$

ou, en remplaçant a, b, c, par leurs valeurs tirées des formules (1),

$$\sin^2\frac{\alpha}{2R}=\sin^2\frac{\beta}{2R}+\sin^2\frac{\gamma}{2R}-2\sin^2\frac{\beta}{2R}\sin^2\frac{\gamma}{2R}-\frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{R}\sin\frac{\gamma}{R}\cos A.$$

Multiplions par $4R^2$ les deux membres de cette égalité, et remarquons que l'on peut mettre une expression telle que $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2R}$ sous la forme $\alpha^2.\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2R}}{\left(\frac{\alpha}{2R}\right)^2}$; nous pourrons écrire l'égalité précédente

sous la forme

$$(2)\quad \alpha^2.\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2R}}{\frac{\alpha}{2R}}\right)^2=\beta^2.\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2R}}{\frac{\beta}{2R}}\right)^2+\gamma^2.\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2R}}{\frac{\gamma}{2R}}\right)-\frac{\beta^2\gamma^2}{2R^2}\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2R}}{\frac{\beta}{2R}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2R}}{\frac{\gamma}{2R}}\right)^2$$

$$-2\beta\gamma\left(\frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\frac{\beta}{R}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\frac{\gamma}{R}}\right)\cos A.$$

Ceci posé, faisons croître R indéfiniment ; dans les hypothèses où nous nous sommes placés, chacune des quantités $\frac{\alpha}{2R}$, $\frac{\beta}{2R}$, $\frac{\gamma}{2R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, tend vers zéro ; le rapport du sinus d'un arc à cet arc tend vers l'unité lorsque l'arc tend vers zéro ; $\frac{1}{R}$ tend vers zéro ; α tend vers a' ; β, γ, A sont d'ailleurs égaux respectivement à b', c' et A' ; l'égalité (2) devient donc à la limite

$$(3)\qquad a'^2=b'^2+c'^2-2b'c'\cos A' ;$$

c'est la relation de trigonométrie rectiligne établie au nº 184.

On obtiendrait de même les relations

$$b'^2=a'^2+c'^2-2a'c'\cos B'$$
$$c'^2=a'^2+b'^2-2a'b'\cos C'.$$

412. Considérons de même les formules (β) de trigonométrie sphérique (400), et cherchons ce que deviennent ces formules

$$(4)\qquad \frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

lorsque R croît indéfiniment, les grandeurs de AC, de AB et de l'angle BAC restant fixes comme précédemment. Conservons les mêmes notations que dans les deux numéros précédents, et remplaçons dans les formules (4), a, b, c, par les valeurs déduites des relations (1) ; ces formules (4) deviennent :

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\sin C};$$

on peut les écrire sous la forme

$$\frac{\alpha}{\sin A}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{\frac{\alpha}{R}}=\frac{\beta}{\sin B}\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\frac{\beta}{R}}=\frac{\gamma}{\sin C}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\frac{\gamma}{R}};$$

si R croît indéfiniment, chacun des arcs $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, tendant vers o, ces formules deviennent :

$$\frac{a'}{\sin A'}=\frac{b'}{\sin B'}=\frac{c'}{\sin C'},$$

et elles expriment que, dans un triangle rectiligne, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés (187).

§ II. — Relations particulières relatives a un triangle sphérique rectangle.

413. Un triangle sphérique peut être rectangle, birectangle ou trirectangle, suivant que ce triangle renferme un angle droit, deux angles droits, ou trois angles droits. Dans un triangle birectangle, les côtés opposés aux deux angles droits sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, et le troisième côté est l'arc qui mesure l'angle opposé ; dans un triangle trirectangle, les trois côtés sont égaux à $\frac{\pi}{2}$; par suite les triangles de chacune de ces deux espèces ne donnent lieu à aucun problème. Nous ne considérerons donc que les triangles rectangles.

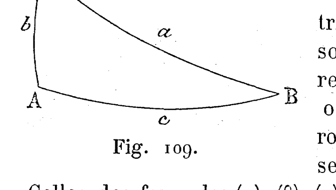
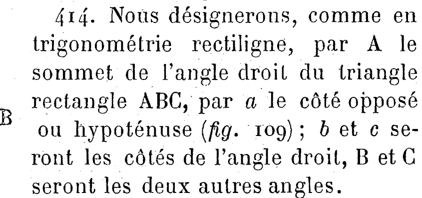


Fig. 109.



414. Nous désignerons, comme en trigonométrie rectiligne, par A le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC, par a le côté opposé ou hypoténuse (*fig.* 109) ; b et c seront les côtés de l'angle droit, B et C seront les deux autres angles.

Celles des formules (α), (β), (γ), (δ), que nous avons établies dans le cas d'un triangle sphérique quelconque, qui renferment l'angle A, se simplifient, si le triangle est rectangle ; elles deviennent

(1) $$\cos a = \cos b \cos c$$

(2) $$\begin{cases} \sin b = \sin a \sin B \\ \sin c = \sin a \sin C \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \\ \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \cos a = \cot B \cot C \\ \cos B = \cos b \sin C \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Ces formules, particulières aux triangles rectangles, sont au nombre de dix, et chacune d'elles renferme trois éléments du triangle; elles peuvent s'énoncer ainsi qu'il suit :

1° *Dans un triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés ;*

2° *Dans un triangle sphérique rectangle, le sinus d'un côté de l'angle droit est égal au sinus de l'hypoténuse multiplié par le sinus de l'angle opposé au côté considéré ;*

3° *Dans un triangle sphérique rectangle, la tangente d'un côté de l'angle droit est égale, soit au produit de la tangente de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent au côté considéré, soit au produit de la tangente de l'angle opposé par le sinus du second côté de l'angle droit ;*

4° *Dans un triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles adjacents, et le cosinus d'un angle oblique est égal au produit du cosinus du côté opposé par le sinus du second angle oblique.*

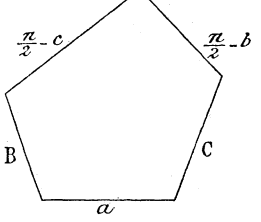


Fig. 110.

415. On peut énoncer ces formules sous une forme plus simple et plus facile à retenir. A cet effet, traçons dans un plan (*fig.* 110) un pentagone dont les côtés ont respectivement même mesure que les quantités

(5) $$\frac{\pi}{2} - b, \quad C, \quad a, \quad B, \quad \frac{\pi}{2} - c;$$

nous obtenons ainsi une suite fermée de cinq quantités; si nous prenons trois quelconques d'entre elles, ou bien deux sont consécu-

tives et la troisième est opposée aux deux autres dans le pentagone. ou bien les trois sont consécutives. Ceci posé, les formules (1), (2), (3), (4) spéciales aux triangles sphériques rectangles (414) expriment que :

Le cosinus d'une quelconque des cinq quantités est égal, soit au produit des sinus des deux quantités opposées, soit au produit des cotangentes des deux quantités adjacentes.

416. **Remarque I.** La formule (1)

$$\cos a = \cos b \cos c$$

montre que dans un triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ est 0 ou 2, c'est-à-dire un nombre pair (Cours de géométrie, n° 896) ; car $\cos a$ et $\cos b \cos c$ devant être de même signe, le produit de ces trois quantités $\cos a \cos b \cos c$ doit être positif, ce qui exige que le nombre des facteurs négatifs soit pair.

417. **Remarque II.** Chacune des relations

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B, \qquad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C,$$

montre que, dans tout triangle sphérique rectangle, chaque angle oblique est de même nature que le côté opposé (Cours de géométrie, n° 897) ; car, chaque côté étant moindre que π et par suite ayant un sinus positif, la relation

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B,$$

par exemple, exige que $\operatorname{tg} b$ et $\operatorname{tg} B$ soient de même signe, et par suite que b et B soient tous les deux moindres que $\frac{\pi}{2}$, ou tous les deux plus grands que $\frac{\pi}{2}$.

418. **Remarque III.** Lorsqu'un côté ou un angle d'un triangle sphérique est donné par son cosinus ou par sa tangente ou par sa cotangente, sa valeur est unique, car ce côté ou cet angle est compris entre 0 et π. Il n'en est pas toujours de même si un côté ou un angle d'un triangle sphérique est donné par son sinus, car, à un sinus donné positif, correspondent deux arcs ou deux angles compris entre 0 et π; ces deux valeurs de l'arc ou de l'angle peuvent correspondre, dans certains cas, à deux triangles sphériques répondant aux données de la question, mais, dans d'autres cas, une seule de ces valeurs convient.

Ainsi, dans un triangle sphérique rectangle, on devra choisir parmi les deux solutions celle qui est telle que chaque côté de l'angle droit soit de même nature que l'angle opposé.



§ III. — Résolution des triangles sphériques rectangles.

419. Un triangle sphérique rectangle renferme cinq éléments, trois côtés et deux angles ; le triangle est déterminé dès que l'on se donne trois quelconques de ces cinq éléments. La résolution des triangles sphériques rectangles présente six cas ; on peut se donner :

1° Les deux côtés de l'angle droit ;

2° Un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ;

3° Un côté de l'angle droit et l'angle opposé ;

4° Un côté de l'angle droit et l'angle adjacent ;

5° L'hypoténuse et un angle ;

6° Les deux angles.

420. **Premier cas.** *On donne les deux côtés de l'angle droit* b *et* c *; calculer l'hypoténuse* a, *et les deux angles* B *et* C.

L'hypoténuse est calculée sans ambiguïté par la formule

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c;$$

les angles B et C sont calculés sans ambiguïté par les formules

$$(2) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

D'ailleurs la relation (1) détermine toujours un cosinus, les relations (2) déterminent toujours $\operatorname{tg} B$ et $\operatorname{tg} C$; le problème est toujours possible et n'admet qu'une solution.

421. **Remarque.** Nous avons vu (141) que, les calculs devant être faits par logarithmes, un arc est déterminé avec plus de précision lorsqu'on en connaît la tangente ou la cotangente que lorsque l'on en connaît le sinus ou le cosinus. Il y a donc avantage, au point de vue de l'approximation, à remplacer la formule (1) par une autre déterminant a par une tangente. Pour cela, on commencera par calculer l'angle B et l'angle C par les formules (2), et on calculera ensuite le côté a par l'une ou l'autre des formules

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B}, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}.$$

422. **Second cas.** *On donne un côté de l'angle droit* b *et l'hypoténuse* a*; calculer le côté* c *et les angles* B *et* C.

Le côté c se calcule par la formule

$$(1) \qquad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

et on obtient pour c une valeur unique; l'angle B est donné par la formule

$$(2) \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

et on prendra pour B celle des deux valeurs fournies par la relation précédente, qui est telle que b et B soient de même nature. Enfin l'angle C est déterminé sans ambiguïté par la formule

$$(3) \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}.$$

423. *Discussion*. On voit que, si le triangle est possible, il n'existe qu'une seule solution; mais, pour que le triangle soit possible, il faut que les valeurs de $\cos c$, de $\sin B$, et de $\cos C$, fournies par les relations (1), (2) et (3) soient admissibles. Je dis que *la condition nécessaire et suffisante est que l'hypoténuse a soit comprise entre b et $\pi - b$.*

En effet, pour que l'équation (2) détermine un sinus, il faut, puisque $\sin b$ et $\sin a$ sont positifs, que l'on ait $\frac{\sin b}{\sin a} < 1$, ou $\sin b < \sin a$; comme les arcs b et a sont moindres que π, il faut que l'on ait, si b est moindre que $\frac{\pi}{2}$, $b < a < \pi - b$, et, si b est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, $\pi - b < a < b$, c'est-à-dire il faut que a soit compris entre b et $\pi - b$. D'ailleurs, dans ces conditions, la valeur de $\cos c$, $\frac{\cos a}{\cos b}$, sera moindre que 1 en valeur absolue, la valeur de $\cos C$, $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$, sera également comprise entre -1 et $+1$. Donc la condition, a compris entre b et $\pi - b$, est nécessaire et suffisante.

424. **Remarque.** Les formules (1), (2), et (3) déterminent les quantités c, C, et B par leurs cosinus ou par leur sinus; on peut effectuer le calcul au moyen de tangentes. On a, en effet, puisque $\frac{c}{2}$ et $\frac{C}{2}$ sont moindres que $\frac{\pi}{2}$,

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}} = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a - b}{2}\operatorname{tg}\frac{a + b}{2}},$$

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}} = \sqrt{\frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)}}.$$

On a enfin, l'angle $\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}$ pouvant être inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$, suivant la grandeur de B par rapport à $\frac{\pi}{2}$,

$$(6)\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}=\pm\sqrt{\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}},$$

et on prendra le signe $+$ si b est moindre que $\frac{\pi}{2}$, le signe $-$ si b est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, puisque b et B sont toujours de même nature.

425. **Troisième cas.** *On donne un côté b de l'angle droit et l'angle opposé* B ; *calculer les côtés a, c, et l'angle* C.

Les éléments inconnus se calculent au moyen des trois formules

$$(1)\quad \sin a=\frac{\sin b}{\sin B},\qquad (2)\quad \sin c=\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B},\qquad (3)\quad \sin C=\frac{\cos B}{\cos b};$$

chacune de ces formules déterminant l'élément correspondant par son sinus, fournit pour chacun de ces éléments deux valeurs, pourvu toutefois que la valeur du sinus de chacun de ces éléments soit positive et plus petite que 1.

426. *Discussion.* Remarquons d'abord que, le triangle étant rectangle, les données b et B doivent être telles que les quantités b et B soient toutes les deux inférieures à $\frac{\pi}{2}$, ou toutes les deux supérieures à $\frac{\pi}{2}$, pour que le triangle soit possible ; supposons cette condition remplie ; les valeurs de $\sin a$, de $\sin c$, et de $\sin C$ sont positives.

Il nous reste à exprimer que ces valeurs sont plus petites que 1 ; je dis que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il en soit ainsi, est que B soit compris entre b et $\frac{\pi}{2}$. En effet, pour que $\sin a$ soit plus petit que 1, il faut que l'on ait, puisque tous les sinus sont positifs,

$$\sin b < \sin B,$$

ou que l'on ait, puisque b et B sont de même nature,

si b est plus petit que $\frac{\pi}{2}$,

$$b < B < \frac{\pi}{2},$$

et si b est plus grand que $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{2} < B < b;$$

il faut donc que B soit compris entre b et $\frac{\pi}{2}$. Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante ; car, si elle est remplie, la valeur de $\sin c$ qui est positive sera plus petite que 1, la valeur de $\sin C$ qui est positive sera également moindre que 1. — Remarquons enfin que la condition, B compris entre b et $\frac{\pi}{2}$ entraîne la condition que b et B soient de même nature ; c'est donc la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité du triangle.

Supposons cette condition remplie, et cherchons combien il existe de triangles répondant à la question.

Soient a', c' et C' les valeurs de a, de c et de C fournies par les tables ; soient $a'' = \pi - a'$, $c'' = \pi - c'$, $C'' = \pi - C'$, les valeurs supplémentaires des premières, qui satisfont également aux équations (1), (2) et (3). Prenons d'abord pour c la valeur c' moindre que $\frac{\pi}{2}$; comme c et C doivent être de même nature, nous devrons prendre pour C la valeur C' moindre aussi que $\frac{\pi}{2}$; enfin, puisque dans un triangle sphérique rectangle le nombre des côtés supérieurs à $\frac{\pi}{2}$ est pair, nous devrons prendre pour a celle des deux valeurs a' ou a'' qui est de même nature que b ; donc une première solution.

Prenons en second lieu pour c la valeur c'' supérieure à $\frac{\pi}{2}$; nous devrons prendre pour C la valeur C'' supérieure à $\frac{\pi}{2}$, et pour a celle des deux valeurs a' ou a'' telle que a et b soient de natures opposées.

En résumé, si B est compris entre b et $\frac{\pi}{2}$, il existe deux triangles répondant à la question :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} b < B < \frac{\pi}{2} & \left\{\begin{array}{lll} c = c' & C = C' & a = a' \\ c = \pi - c' & C = \pi - C' & a = \pi - a, \end{array}\right. \\ \frac{\pi}{2} < B < b & \left\{\begin{array}{lll} c = c' & C = C' & a = \pi - a' \\ c = \pi - c' & C = \pi - C' & a = a. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Si b est égal à B, on a $\sin a = \sin c = \sin C = 1$, $a = c = C = \frac{\pi}{2}$, une solution, un triangle birectangle.

Si B n'est pas compris entre b et $\frac{\pi}{2}$, le triangle est impossible.

427. **Remarque I.** Il est facile de prévoir géométriquement que, si le problème est possible, il admet deux solutions. Supposons en effet que le triangle ABC rectangle en A réponde à la question (*fig.* 111); prolongeons les arcs de grand cercle BA et BC au delà des points A et C jusqu'à leur intersection en B'; le triangle AB'C répond aussi à la question, car il est rectangle en A, le côté AC est égal à b, et l'angle AB'C est égal à l'angle ABC, c'est-à-dire à l'angle B.

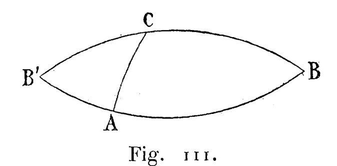


Fig. 111.

428. **Remarque II.** Les formules (1), (2) et (3), déterminent les quantités inconnues au moyen de leurs sinus ; on peut effectuer leur calcul au moyen de tangentes. On a en effet :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} = \pm\sqrt{\frac{\sin B+\sin b}{\sin B-\sin b}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}} \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{c}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\sin c}{1-\sin c}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B-\operatorname{tg} b}} = \pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}} \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\sin C}{1-\sin C}} = \pm\sqrt{\frac{\cos b+\cos B}{\cos b-\cos B}} = \pm\sqrt{\cot\frac{B+b}{2}\cot\frac{B-b}{2}};
\end{aligned}\right.$$

et on prendra, dans chacune de ces trois formules, le signe + si l'élément correspondant a, ou c, ou C, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, le signe — si l'élément correspondant est supérieur à $\frac{\pi}{2}$; le tableau de discussion (4) indique d'ailleurs, suivant les données, le signe qu'il convient de choisir dans les seconds membres de chacune des formules (5).

429. **Quatrième cas.** *On donne un côté b de l'angle droit et l'angle adjacent C ; calculer les côtés a, c, et l'angle B.*

Les éléments inconnus sont déterminés par les formules

$$(1)\quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}, \qquad (2)\quad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C, \qquad (3)\quad \cos B = \cos b \sin C.$$

430. *Discussion.* La valeur de $\cos B$ est comprise entre -1 et $+1$, et de même signe que le signe de $\cos b$; l'angle B étant déterminé par son cosinus, on n'obtient pour B qu'une seule valeur, valeur de même nature que b, puisque $\cos b$ et $\cos B$ sont de même signe. Les éléments a et c étant déterminés par leurs tangentes, on n'obtient pour chacun de ces éléments qu'une seule valeur. Le triangle est donc toujours possible et n'admet qu'une solution.

431. **Remarque.** Si l'on veut éviter l'emploi d'un cosinus pour calculer l'angle B, on commencera par calculer c par la formule (2) et on calculera ensuite B au moyen de la formule

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}.$$

432. **Cinquième cas.** *On donne l'hypoténuse a et un angle oblique* B ; *calculer les côtés de l'angle droit b, c, et l'angle* C.

Les éléments inconnus sont donnés par les formules.

$$(1)\ \sin b = \sin a \sin B, \quad (2)\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B, \quad (3)\ \cot C = \cos a \operatorname{tg} B.$$

433. *Discussion.* Les formules (2) et (3) déterminent pour chacune des quantités c et C une seule valeur ; ces deux éléments c et C sont de même nature, puisque $\operatorname{tg} c$ et $\cot C$ sont de même signe. La formule (1) détermine b par son sinus ; la valeur de $\sin b$ est plus petite que 1 ; de plus, comme b et B doivent être de même nature, on prendra pour b celui des deux arcs satisfaisant à la relation (1) qui est de même nature que B. Le problème est donc toujours possible et n'admet qu'une solution.

434. **Remarque.** Le côté b est déterminé par son sinus ; si on veut le déterminer au moyen d'une tangente, on commencera par calculer l'angle C au moyen de la formule (3), et on calculera alors le côté b par la formule

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

435. **Sixième cas.** *On donne les deux angles* B *et* C, *et on demande de calculer l'hypoténuse a et les côtés b et c.*

Les éléments inconnus sont déterminés par les formules

$$(1)\ \cos a = \cot B \cot C, \quad (2)\ \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad (3)\ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Chacun des éléments inconnus étant donné par son cosinus, ne peut admettre qu'une seule valeur; pour qu'il admette une valeur, il faut que l'expression de chacun de ces cosinus soit comprise entre -1 et $+1$. Si donc le problème est possible, il n'admet qu'une solution.



436. *Discussion.* Au point de vue géométrique, les conditions de possibilité sont immédiates ; il faut et il suffit, en effet, pour que le triangle existe, que l'on puisse construire un triangle dont les côtés soient $\frac{\pi}{2}$, $\pi - B$, $\pi - C$; le triangle polaire de ce triangle sera le triangle demandé ; or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que chacun des côtés soit plus petit que la somme des deux autres et que la somme des trois côtés soit moindre que 2π, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\pi}{2} < 2\pi - (B + C), \qquad \pi - B < \pi + \frac{\pi}{2} - C, \qquad \pi - C < \pi + \frac{\pi}{2} - B,$$

et

$$2\pi + \frac{\pi}{2} - (B + C) < 2\pi,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{\pi}{2} < B + C < \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} < B - C < \frac{\pi}{2};$$

les conditions de possibilité sont donc : 1° *que la somme* $B + C$ *soit comprise entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{3\pi}{2}$; 2° *que la différence* $B - C$ *soit comprise entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

437. On peut retrouver par le calcul ces deux conditions. Considérons, par exemple, la formule (2) ; pour que cette formule détermine un cosinus, il faut que l'on ait :

$$-1 < \frac{\cos B}{\sin C} < 1,$$

ou, comme $\sin C$ est positif, que l'on ait :

$$-\sin C < \cos B < \sin C.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'angle B est aigu ou obtus.

1° Soit $B < \frac{\pi}{2}$; $\cos B$ est positif, l'inégalité $-\sin C < \cos B$ est vérifiée ; la seule condition est donc que l'on ait :

$$\cos B < \sin C,$$

ou

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) < \sin C.$$

Or, les angles $\frac{\pi}{2} - B$ et C sont positifs, et moindres que π; il faut

donc que C soit compris entre $\frac{\pi}{2} - B$ et son supplément $\frac{\pi}{2} + B$, et comme $\frac{\pi}{2} - B$ est moindre que $\frac{\pi}{2} + B$, il faut que l'on ait :

$$\frac{\pi}{2} - B < C < \frac{\pi}{2} + B$$

ou

$$(5) \qquad B + C > \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad B - C > -\frac{\pi}{2};$$

d'ailleurs B étant moindre que $\frac{\pi}{2}$ et C étant moindre que π, l'inégalité $B + C < \frac{3\pi}{2}$ est vérifiée ; enfin la différence $B - C$ est moindre que $\frac{\pi}{2}$, puisque B est, par hypothèse, inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Donc les conditions (4) sont nécessaires.

2° Soit $B > \frac{\pi}{2}$; cos B est négatif ; l'inégalité $\cos B < \sin C$ est vérifiée ; la seule condition est donc que l'on ait :

$$-\cos B < \sin C,$$

ou

$$\cos(\pi - B) < \sin C,$$

ou

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi + B\right) < \sin C,$$

ou enfin

$$\sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) < \sin C.$$

Chacun des angles $B - \frac{\pi}{2}$, C, est positif et moindre que π; de plus l'angle $B - \frac{\pi}{2}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$; il faut donc que l'on ait :

$$B - \frac{\pi}{2} < C < \pi - \left(B - \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$(6) \qquad B - C < \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad B + C < \frac{3\pi}{2}.$$

D'ailleurs B étant supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la somme $B + C$ est plus grande

que $\frac{\pi}{2}$, enfin la différence $B-C$ est plus grande que $-\frac{\pi}{2}$; car, si C est moindre que B, la différence $B-C$ est positive, et si C est supérieur à B, comme B est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, les deux angles C et B étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π ont une différence $C-B$ plus petite que $\frac{\pi}{2}$, et par suite on a $B-C>-\frac{\pi}{2}$. Donc les inégalités (4) sont encore nécessaires.

Ces inégalités (4) sont d'ailleurs suffisantes ; car, si elles sont remplies, l'équation (3) détermine pour $\cos c$ une valeur admissible ; il suffit pour le voir de recommencer sur la valeur de $\cos c$ la discussion précédente ; enfin l'équation (1) détermine pour $\cos a$ une valeur comprise entre -1 et $+1$. En effet $\cos a$ étant égal à $\cot B \cot C$, ou à $\frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$, il suffit de démontrer que, si les inégalités (4) sont vérifiées, la valeur absolue du produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est supérieure à 1.

Si B et C sont moindres que $\frac{\pi}{2}$, le produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est positif, et, à cause de l'inégalité $B+C>\frac{\pi}{2}$, ou $\frac{\pi}{2}-B<C$, on a : $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-B\right)<\operatorname{tg} C$, ou $\cot B<\operatorname{tg} C$, ou $1<\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$;

Si l'on a $B<\frac{\pi}{2}$, $C>\frac{\pi}{2}$, le produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est négatif ; mais en vertu de l'inégalité $B-C>-\frac{\pi}{2}$, ou $\frac{\pi}{2}-B<\pi-C$, on a :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-B\right)<\operatorname{tg}(\pi-C), \qquad \text{ou} \qquad 1<-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

donc le produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est supérieur à 1 en valeur absolue ;

Si l'on a $B>\frac{\pi}{2}$ avec $C<\frac{\pi}{2}$, le produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est encore négatif ; or, de l'inégalité $B-C<\frac{\pi}{2}$, on déduit $B-\frac{\pi}{2}<C$, et comme ces deux angles sont aigus, $\operatorname{tg}\left(B-\frac{\pi}{2}\right)<\operatorname{tg} C$, ou $1<\operatorname{tg}(\pi-B) \operatorname{tg} C$, ou $1<-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, ce qui montre bien que la valeur absolue de $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est supérieure à 1 ;

Enfin si l'on a simultanément $B>\frac{\pi}{2}$, $C>\frac{\pi}{2}$, le produit $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ est

positif; de l'inégalité $B+C<\frac{3\pi}{2}$, on déduit $B-\frac{\pi}{2}<\pi-C$, ou, puisque les angles $B-\frac{\pi}{2}$ et $\pi-C$ sont aigus, $\operatorname{tg}\left(B-\frac{\pi}{2}\right)<\operatorname{tg}(\pi-C)$, ou $\cot(\pi-B)<\operatorname{tg}(\pi-C)$, ou $1<\operatorname{tg}(\pi-B)\operatorname{tg}(\pi-C)$, ou $1<\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$, ce qu'il fallait démontrer.

Les conditions (4) sont donc nécessaires et suffisantes.

438. **Remarque.** Les formules (1), (2) et (3) déterminent les éléments inconnus a, b, c, par leurs cosinus; on peut calculer ces éléments au moyen de tangentes, par les formules

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\sqrt{\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}}=\sqrt{\frac{-\cos(B+C)}{\cos(B-C)}}\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{1-\cos b}{1+\cos b}}=\sqrt{\frac{\sin C-\cos B}{\sin C+\cos B}}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B-C}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{1-\cos c}{1+\cos c}}=\sqrt{\frac{\sin B-\cos C}{\sin B+\cos C}}=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)};
\end{aligned}\right.$$

devant chacun des radicaux, on ne doit prendre que le signe $+$, car chacun des côtés a, b, c, étant moindre que π, chacun des arcs $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, est moindre que $\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs les radicaux sont réels, en vertu des conditions de possibilité (4) que nous supposons remplies.

§ IV. — Résolution des triangles sphériques obliquangles au moyen de triangles rectangles.

439. On peut, dans un certain nombre de cas, ramener immédiatement la résolution d'un triangle obliquangle à la résolution de triangles rectangles; c'est ce que montrent les trois exemples suivants :

440. **Exemple I.** Si dans le triangle donné un côté a est égal à $\frac{\pi}{2}$, le triangle polaire A'B'C' a un angle droit, l'angle A'; d'ailleurs, dans le triangle donné, on connaît deux autres éléments, côtés ou angles; donc, dans le triangle polaire, qui est un triangle rectangle, on connaît deux éléments correspondants, angles ou côtés, et l'on est ramené, pour résoudre le triangle polaire, à l'un des six cas précédemment examinés. Le triangle polaire étant connu, on en déduira facilement, en prenant les suppléments de ses côtés et de ses angles, les angles et les côtés correspondants du triangle donné.

441. **Exemple II.** Si dans le triangle donné ABC, parmi les éléments donnés se trouvent deux côtés égaux, $a=b$, ou deux angles égaux, $A=B$, le triangle est isocèle; si alors du sommet C on abaisse l'arc de grand cercle CH perpendiculaire sur le côté opposé et si H est le pied de l'arc perpendiculaire qui se trouve sur AB, entre A et B (*fig.* 112), on partage le triangle ABC en deux triangles rectangles qui ont leurs éléments égaux chacun à chacun, mais disposés en ordre inverse. On résoudra l'un de ces triangles rectangles dans lequel on connaît, outre l'angle droit, deux éléments, et on aura immédiatement les éléments du triangle ABC.

442. **Exemple III.** Supposons que dans le triangle donné ABC,

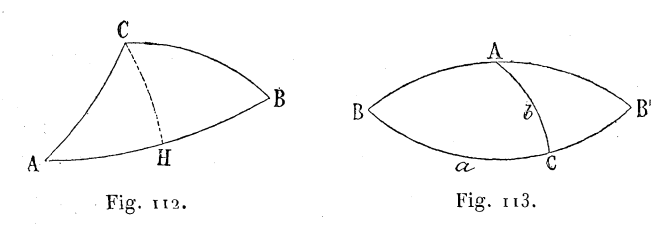


Fig. 112. Fig. 113.

deux côtés donnés ou deux angles donnés soient tels que leur somme soit égale à π, c'est-à-dire supposons que l'on ait, soit $a+b=\pi$, soit $A+B=\pi$. Prolongeons les côtés BC, BA jusqu'à leur intersection en B' (*fig.* 113), on forme ainsi le triangle ACB'; ce triangle est isocèle, puisque dans la première hypothèse $CB'=\pi-a=b=AC$, et que dans la seconde $\widehat{CAB'}=\pi-\widehat{BAC}=B=B'$. On est donc ramené au cas particulier précédent et, par suite, la résolution s'effectue au moyen de triangles rectangles.

443. La résolution des triangles obliquangles présente six cas, suivant qu'on se donne parmi les six éléments, côtés et angles, trois quelconques d'entre eux. Quatre de ces six cas peuvent se résoudre au moyen de triangles rectangles; nous allons les examiner successivement.

444. **Premier cas.** *Dans un triangle* ABC, *on donne deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C.

Du sommet A, abaissons l'arc de grand cercle HAH' perpendiculaire sur le côté BC (*fig.* 114) et soit H le premier des deux points d'intersection de HAH' avec l'arc CB que l'on rencontre en marchant sur CB du point C vers le point B; le triangle ABC est ainsi la somme ou la différence des deux triangles rectangles ACH, ABH, suivant que le point H est sur CB, ou sur le prolongement de CB au delà de B. Or,

dans le triangle rectangle ACH, on connaît l'hypoténuse b, et l'angle $\widehat{ACH}$ qui est égal à C; on peut donc résoudre ce triangle ACH, calculer AH, CH; connaissant CH, on en déduit par soustraction la valeur de BH, et on est ramené à résoudre le triangle rectangle ABH dans lequel on connaît les deux côtés de l'angle droit AH et BH. Si CH est

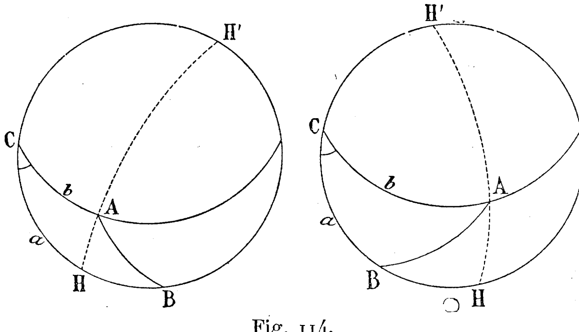


Fig. 114.

inférieur à a, l'angle B du triangle ABC est égal à l'angle $\widehat{ABH}$ du triangle rectangle ABH; si au contraire CH est supérieur à a, l'angle B du triangle ABC est le supplément de l'angle $\widehat{ABH}$ du triangle rectangle ABH.

Chacun des triangles rectangles existe et n'admet qu'une solu-

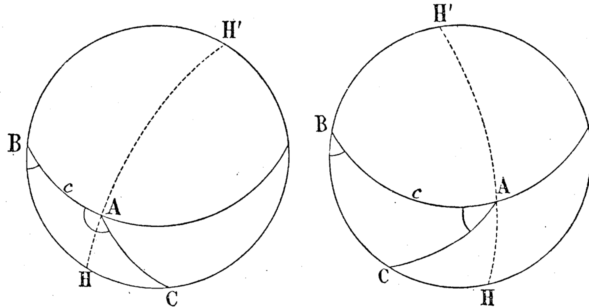


Fig. 115.

tion; il existe donc toujours un triangle ABC et un seul correspondant aux données a, b et C.

445. **Second cas.** *Dans un triangle* ABC, *on donne deux angles* A, B *et le côté compris* c.

Par le sommet A, menons l'arc de grand cercle HAH' perpendiculaire sur le côté BC (*fig.* 115), et soit H le premier des deux points

d'intersection de HAH' avec l'arc BC que l'on rencontre en marchant sur le côté BC à partir du point B dans le sens de B vers C; le triangle ABC est ainsi la somme ou la différence des deux triangles rectangles ABH et ACH suivant que le point H est sur BC ou sur son prolongement au delà du point C.

Dans le triangle rectangle ABH, on connaît l'hypoténuse c et l'angle B; on calculera l'angle $\widehat{BAH}$ et les côtés AH et BH. Dans le triangle rectangle ACH on connaît alors un côté de l'angle droit AH, et l'angle $\widehat{CAH}$ qui est égal à la valeur absolue de la différence entre l'angle A donné et l'angle calculé $\widehat{BAH}$; on résout ce triangle rectangle; l'angle C du triangle ABC est égal à l'angle $\widehat{ACH}$ du triangle rectangle ou à son supplément, suivant que l'angle $\widehat{BAH}$ est inférieur ou supérieur à l'angle donné A. On calcule enfin CH; le côté BC est égal à la somme de BH et de CH ou à l'excès de BH sur CH, suivant que l'angle $\widehat{BAH}$ est inférieur ou supérieur à l'angle donné A.

Chacun des triangles rectangles existe et n'admet qu'une solution; il existe donc un triangle ABC et un seul, correspondant aux données A, B et c.

446. Ce cas peut d'ailleurs être ramené immédiatement au cas précédent, par la considération du triangle polaire; car dans le triangle polaire du triangle proposé, on connaît deux côtés $\pi - A$, $\pi - B$ et l'angle compris $\pi - c$; ayant calculé les éléments du triangle polaire, on en déduira facilement les éléments du triangle ABC.

447. **Troisième cas.** *Dans un triangle* ABC, *on donne deux côtés* a, b *et l'angle* A *opposé à l'un d'eux.*

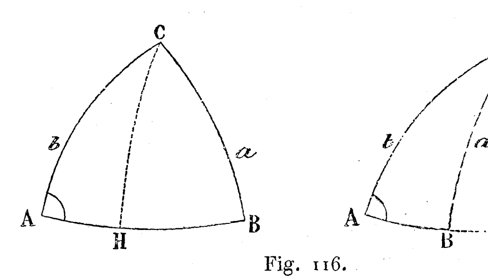


Fig. 116.

Par le sommet C, menons l'arc de grand cercle CH perpendiculaire sur le côté AB, et soit H le premier des deux points d'intersection de ce grand cercle avec l'arc AB que l'on rencontre en marchant sur le côté AB à partir du point A dans le sens de A vers B; le point H peut se trouver sur le côté AB soit entre A et B, soit au delà du point B

(*fig.* 116). Dans l'un et l'autre cas, dans le triangle rectangle ACH, on connaît l'hypoténuse b et l'angle oblique A; on peut donc résoudre ce triangle et calculer CH et AH. On a :

$$\sin \mathrm{CH} = \sin b \sin \mathrm{A}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tg\,AH} = \mathrm{tg}\, b \cos \mathrm{A};$$

on prendra pour CH l'arc moindre que π qui est de même nature que l'angle A, de telle sorte que, si l'on a $\mathrm{A} < \frac{\pi}{2}$, on aura $\mathrm{CH} < \frac{\pi}{2}$, et si on a $\mathrm{A} > \frac{\pi}{2}$, on aura $\mathrm{CH} > \frac{\pi}{2}$.

Ceci posé, dans le triangle CHB rectangle en H, on connaît l'hypoténuse a et un côté CH de l'angle droit; on peut donc calculer l'angle $\widehat{\mathrm{CBH}}$ et le côté BH; on a :

$$\sin \widehat{\mathrm{CBH}} = \frac{\sin \mathrm{CH}}{\sin a}, \qquad \text{et} \qquad \cos \mathrm{BH} = \frac{\cos a}{\cos \mathrm{CH}};$$

on aura soin de prendre pour l'angle $\widehat{\mathrm{CBH}}$ l'angle moindre que π qui est de même nature que le côté CH; soit B′ l'angle ainsi calculé.

Le côté AB est égal, suivant les cas, soit à la somme des arcs AH et BH, soit à leur différence AH — BH, et l'angle B du triangle ABC est égal, dans le premier cas à l'angle B′, dans le second cas au supplément de B′, π — B′. Nous appellerons triangle de *première espèce* un triangle répondant aux données et tel que le point H soit entre les points A et B, et triangle de *seconde espèce* un triangle répondant également aux données de la question, mais tel que le point H se trouve sur le prolongement de AB au delà du point B, de telle sorte que les éléments de ces triangles, s'ils existent, sont :

Triangle de 1re espèce	A,	$\mathrm{B} = \mathrm{B}'$,	a,	b,	$c = \mathrm{AH} + \mathrm{BH}$
Triangle de 2e espèce	A,	$\mathrm{B} = \pi - \mathrm{B}'$,	a,	b,	$c = \mathrm{AH} - \mathrm{BH}$.

448. Il nous reste à discuter, c'est-à-dire à chercher dans quelles conditions le triangle est possible, et, s'il est possible, le nombre et la nature des solutions.

Pour que le triangle soit possible, il faut d'abord que les triangles rectangles ACH, BCH existent; le triangle rectangle ACH, dans lequel on connaît l'hypoténuse et un angle oblique, existe certainement, puisque b et A sont positifs et moindres chacun que π. Dans le triangle BCH on connaît l'hypoténuse a et un côté CH; la condition nécessaire et suffisante pour que ce triangle existe est que l'hypoténuse a soit comprise entre CH et π — CH, c'est-à-dire, comme ces arcs sont positifs et moindres que π, que l'on ait :

$$\sin \mathrm{CH} < \sin a,$$

ou

$$\sin b \sin A < \sin a.$$

Si cette condition n'est pas remplie, il n'existe aucun triangle satisfaisant aux données de la question. Mais si cette condition est remplie, le triangle ABC n'existe pas nécessairement.

On démontre, en cherchant à construire géométriquement le triangle (Cours de géométrie, n° 909), que la discussion présente les cas résumés dans le tableau suivant :

$$A < \frac{\pi}{2}\begin{cases} a > CH \begin{cases} a \text{ inférieur à } b \text{ et à } \pi - b & 2 \text{ solutions.}\\ a \text{ compris entre } b \text{ et } \pi - b & 1 \text{ solution } \begin{cases} b < \frac{\pi}{2}, \; 1^{re} \text{ espèce.}\\ b > \frac{\pi}{2}, \; 2^{e} \text{ espèce.}\end{cases}\\ a \text{ supérieur à } b \text{ et à } \pi - b & 0 \text{ solution.}\end{cases}\\ a < CH \qquad\qquad 0 \text{ solution.}\end{cases}$$

$$A > \frac{\pi}{2}\begin{cases} a < CH \begin{cases} a \text{ supérieur à } b \text{ et à } \pi - b & 2 \text{ solutions.}\\ a \text{ compris entre } b \text{ et } \pi - b & 1 \text{ solution. } \begin{cases} b < \frac{\pi}{2}, \; 2^{e} \text{ espèce.}\\ b > \frac{\pi}{2}, \; 1^{re} \text{espèce.}\end{cases}\\ a \text{ inférieur à } b \text{ et à } \pi - b & 0 \text{ solution.}\end{cases}\\ a > CH \qquad\qquad 0 \text{ solution.}\end{cases}$$

En se reportant au tableau précédent, il est facile de voir dans lequel des cas on se trouve, et par suite de trouver les éléments inconnus de la solution ou des solutions du problème.

449. **Quatrième cas**. *Dans un triangle* ABC, *on donne deux angles* A, B *et le côté* a *opposé à l'un d'eux* A.

On peut encore résoudre le triangle au moyen de triangles rectangles. On remarque que, si l'on peut construire un triangle A'B'C' ayant pour deux de ses côtés $a' = \pi - A$, $b' = \pi - B$, et ayant $A' = \pi - a$ pour angle opposé au côté $\pi - A$, le triangle polaire de ce triangle sera le triangle demandé ; d'ailleurs, autant il existera de triangles admettant comme côtés a', b', et admettant A' pour angle opposé au côté a', autant le problème proposé admettra de solutions. Nous sommes donc ramenés à résoudre un triangle A'B'C', connaissant deux côtés a', b' et l'angle A' opposé à l'un d'eux, c'est-à-dire au cas examiné dans le numéro précédent.

450. **Remarque.** Nous avons résolu, au moyen de triangles rectangles, nos 444-449, quatre des six cas qui peuvent se présenter dans la résolution des triangles obliquangles lorsqu'on se donne trois des six éléments, côtés et angles. Il nous reste, pour achever la résolution des triangles obliquangles, à examiner le cas où l'on se donne les trois côtés, et le cas où l'on se donne les trois angles.

451. **Cinquième cas.** *Dans un triangle* ABC, *on donne les trois côtés* a, b, c.

On pose $a+b+c=2p$, et on calcule les angles A, B, C, au moyen des formules (ε) du no 408

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}. \end{aligned}\right.$$

Nous supposons, bien entendu, que les côtés donnés satisfont aux conditions de possibilité connues.

452. **Sixième cas.** *Dans un triangle* ABC, *on donne les trois angles* A, B, C.

On pose $2S = A+B+C-\pi$, et on calcule les côtés par les formules du no 409.

$$\left\{\begin{aligned} \cot\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S \sin(A-S)}} \\ \cot\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A-S)\sin(C-S)}{\sin S \sin(B-S)}} \\ \cot\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A-S)\sin(B-S)}{\sin S \sin(C-S)}}. \end{aligned}\right.$$

Il est bien entendu que nous supposons que les angles A, B, C, satisfont aux conditions de possibilité connues.

453. **Remarque sur la résolution des triangles sphériques.** Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que, pour évaluer les côtés et les angles d'un triangle sphérique ABC, on prend pour unité de longueur le rayon de la sphère à laquelle appartient le triangle sphérique, pour unité d'arc l'arc d'un grand cercle de longueur égale au rayon, et pour unité d'angle l'angle au centre corres-

pondant. Toutes les formules ainsi établies renferment les côtés et les angles du triangle sous les signes trigonométriques; elles sont par suite encore applicables si l'on prend pour unité d'arc l'arc de grand cercle d'un degré, pour unité d'angle, l'angle d'un degré; il suffit de remplacer dans ces formules les côtés et les angles par leurs expressions en degrés, minutes et secondes, pourvu qu'on ait soin, partout où figure π sous les signes trigonométriques, de lui substituer 180°.

Dans la pratique, lorsque l'on résout numériquement un triangle, comme les tables renferment les lignes trigonométriques des arcs et des angles évalués en degrés, minutes et secondes, il faut, si les arcs sont donnés par leurs longueurs, le rayon de la sphère étant pris ou non pour unité, pouvoir trouver le nombre de degrés, minutes et secondes qu'ils contiennent, et réciproquement, lorsqu'on a obtenu par le calcul le nombre de degrés, minutes et secondes, contenus dans un côté du triangle, il faut pouvoir trouver la longueur de ce côté, le rayon de la sphère étant connu.

Soit α le nombre de secondes qui exprime la grandeur d'un angle ou la grandeur d'un arc de grand cercle; soit a la mesure de cet angle ou la longueur de cet arc dans le grand cercle, lorsqu'on a pris le rayon de ce grand cercle pour unité de longueur. Soit ω la longueur de l'arc d'une seconde dans une circonférence de rayon 1; on a par suite : $a = \alpha\omega$, d'où

$$\alpha = \frac{a}{\omega}. \tag{1}$$

Cette formule donne α connaissant a; inversement elle donne a lorsqu'on connaît α,

$$a = \alpha\omega. \tag{2}$$

Tout revient à connaître la valeur de ω ou plutôt de $\log \omega$, car on fera le calcul par logarithmes. On remarque que les sept premières décimales de $\log \sin \omega$ ou de $\log \sin 1''$ sont les mêmes que celles de $\log \omega$; on peut donc, dans les calculs logarithmiques, remplacer la formule (1) par la formule

$$\alpha = \frac{a}{\sin 1''}. \tag{3}$$

Si donc on connaît a, on aura :

$$\alpha = \frac{a}{\sin 1''}, \tag{4}$$



et si on connaît α, on aura :

$$(5) \qquad a = \alpha \sin 1''.$$

454. Supposons que le rayon de la sphère ne soit pas pris pour unité de longueur; soit R l'expression de sa mesure, au moyen d'une unité de longueur quelconque; la longueur a' d'un arc de α secondes dans un grand cercle de cette sphère s'obtiendra en multipliant par R la mesure de la longueur a de l'arc de α secondes dans une circonférence de rayon 1. On aura donc $a' = Ra$, et par suite $a = \frac{a'}{R}$; si donc on se donne la longueur a' d'un arc de grand cercle dans une sphère de rayon R, on obtiendra le nombre de secondes comprises dans cet arc par la formule

$$(6) \qquad \alpha = \frac{a'}{R \sin 1''};$$

inversement, connaissant α, on obtiendra la longueur a' de l'arc correspondant par la formule

$$(7) \qquad a' = R\alpha \sin 1''.$$

455. **Aire d'un triangle sphérique.** On sait que, si on prend sur la sphère pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, et pour unité d'angle l'angle droit (Cours de géométrie, nº 928), la mesure de l'aire d'un triangle sphérique est l'excès sur 2 de la somme de ses angles.

Soit σ la mesure de l'aire d'un triangle sphérique ABC dans ces conditions, soient α, β, γ les mesures de ces angles, l'angle droit étant pris pour unité, on a :

$$(1) \qquad \sigma = \alpha + \beta + \gamma - 2.$$

Proposons-nous de trouver l'expression de la surface en mètres carrés.

Soit R le rayon de la sphère, le mètre étant pris pour unité de longueur; soit Σ l'expression en mètres carrés de l'aire du triangle sphérique ABC; soit T l'expression en mètres carrés de la surface du triangle sphérique trirectangle; le rapport $\frac{\Sigma}{T}$ est la mesure de l'aire du triangle ABC lorsqu'on prend pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle; on a par suite $\frac{\Sigma}{T} = \sigma$, d'où

$$(2) \qquad \Sigma = T\sigma.$$

D'autre part, si A', B', C', sont les expressions en degrés des an-

gles du triangle sphérique, on a $\alpha = \frac{A'}{90^o}$, $\beta = \frac{B'}{90^o}$, $\gamma = \frac{C'}{90^o}$, et par suite

$$\alpha + \beta + \gamma - 2 = \frac{A' + B' + C'}{90^o} - 2 = \frac{A' + B' + C' - 180^o}{90^o}.$$

On a donc, pour l'expression cherchée de la surface

$$(3) \qquad \Sigma = T.\frac{A' + B' + C' - 180^o}{90^o},$$

ou, comme T est égale à $\frac{\pi R^2}{2}$,

$$(4) \qquad \Sigma = \pi R^2.\frac{A' + B' + C' - 180^o}{180^o}.$$

§ V. — Applications de trigonométrie sphérique.

456. **Problème.** *Réduire un angle à l'horizon.*

Soient OA, OB, deux demi-droites dont on a mesuré l'angle (*fig.* 117); soit c la mesure de cet angle dans une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur; soit OZ la verticale passant par le point O, et supposons qu'on ait mesuré les deux angles AOZ $= b$, BOZ $= a$: *réduire à l'horizon* l'angle AOB, c'est trouver l'angle, sur le plan horizontal H mené par O, des projections OA', OB' des deux côtés OA, OB de l'angle AOB. On voit que l'angle cherché A'OB' n'est autre que le rectiligne du dièdre OZ du trièdre OABZ. Si du point O comme centre, avec l'unité de longueur comme rayon, on décrit une sphère, le trièdre OABZ détermine sur la surface de la sphère un triangle sphérique ABZ dans lequel on connaît les côtés, a, b, c; la question revient donc à calculer l'angle A de ce triangle. Si on pose :

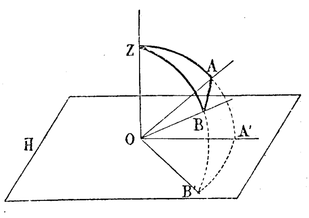


Fig. 117.

$$a + b + c = 2p,$$

on a (408) :

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \,\sin(p-a)}}.$$

457. **Problème.** *Trouver l'expression du volume d'un parallélipipède oblique, connaissant les longueurs des arêtes et les angles que ces arêtes font entre elles.*

Soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, les longueurs des trois arêtes issues du sommet O du parallélipipède ; soient $\widehat{BOC} = \lambda$, $\widehat{AOC} = \mu$, $\widehat{AOB} = \nu$, les angles de ces arêtes entre elles (*fig.* 118); nous nous proposons d'obtenir l'expression du volume V du parallélipipède construit sur OA, OB, OC, en fonction des données précédentes.

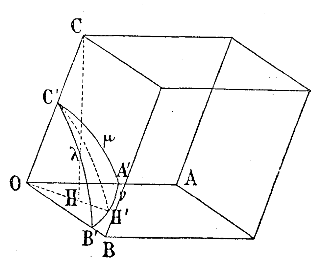


Fig. 118.

Abaissons du point C la perpendiculaire CH sur la base AOB; le volume du parallélipipède est mesuré par le produit de la base par la hauteur ; la surface de la base a pour mesure $ab \sin \nu$; on a donc :

$$V = ab \sin \nu . CH.$$

Joignons OH ; dans le triangle COH rectangle en H, on a :

$$CH = OC \sin COH = c \sin COH.$$

Tout revient donc à calculer sin COH. Pour cela, du point O comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, décrivons une sphère, et soient A', B', C', les points où cette sphère rencontre les arêtes OA, OB, OC, du même côté du point O que les points A, B, C; joignons A'B', A'C', B'C', par des arcs de grand cercle ; nous formons ainsi un triangle sphérique A'B'C' dont les côtés ont respectivement pour mesure λ, μ et ν; ce triangle sphérique est donc connu. D'autre part le plan COH coupe cette sphère suivant un arc de grand cercle C'H' qui est perpendiculaire en H' sur le grand cercle B'C', et dont la longueur mesure l'angle inconnu $\widehat{COH}$. Le triangle sphérique A'H'C', rectangle en H', donne :

$$\sin \widehat{COH} = \sin \mu . \sin \widehat{C'A'H'},$$

et par suite

$$V = abc \sin \mu \sin \nu \sin C'A'H'.$$

Mais l'angle C'A'H' n'est autre que l'angle A' du triangle sphérique A'B'C', dans lequel on a :

$$\sin A' = 2 \sin \frac{A'}{2} \cos \frac{A'}{2} = 2 \frac{\sqrt{\sin p \sin (p-\lambda) \sin (p-\mu) \sin (p-\nu)}}{\sin \mu \sin \nu},$$

si on pose :

$$\lambda + \mu + \nu = 2p.$$

On a donc :

$$V = 2abc\sqrt{\sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)},$$

ou, en remplaçant p par sa valeur,

$$(1)\quad V = 2abc\sqrt{\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\lambda+\nu-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}}.$$

458. **Remarque.** Il est bon de remarquer que, si les trois droites OA, OB, OC, déterminent un trièdre, c'est-à-dire ne sont pas dans un même plan, la valeur de V fournie par la relation (1) est réelle. En effet, puisque dans un trièdre la somme des faces $\lambda+\mu+\nu$ est positive et inférieure à 2π, l'arc $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$ est positif et plus petit que π, et son sinus est positif; en outre, puisque dans un trièdre chaque face est plus petite que la somme des deux autres, chacun des arcs $\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}$, $\frac{\lambda+\nu-\mu}{2}$, $\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}$ est positif; d'ailleurs chacun d'eux, étant moindre que $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$, est moindre que π; donc le sinus de chacun d'eux est positif. Ainsi chacun des sinus qui entrent sous le radical dans la formule (1) est positif, et par suite l'expression du volume V est réelle et positive.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V.

1. Démontrer que, étant donné un triangle sphérique ABC rectangle en A, dont les côtés a, b, sont moindres que $\frac{\pi}{2}$, le triangle A'B'C' qui admet pour éléments

$$a' = \frac{\pi}{2} - b, \qquad b' = \frac{\pi}{2} - a, \qquad C' = C,$$

est rectangle en A'.

2. Résoudre un triangle sphérique rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon sphérique du cercle inscrit.

3. Démontrer que, si r désigne le rayon sphérique du cercle inscrit dans un triangle ABC, si $a, b, c, 2p$, désignent les côtés et le périmètre



de ce triangle, on a :

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}.$$

4. Démontrer que, si R désigne le rayon sphérique du cercle circonscrit à un triangle ABC, si A, B, C, sont les angles de ce triangle et si on pose $2S = A + B + C - \pi$, on a :

$$\cot R = \sqrt{\frac{\sin(A-S)\sin(B-S)\sin(C-S)}{\sin S}}.$$

5. Si l'on désigne par a, b, c, les côtés d'un triangle sphérique ABC, par A, B, C, les angles de ce triangle, démontrer les formules suivantes dues à Delambre :

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

6. Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés d'un triangle sphérique ABC, par A, B, C, les angles de ce triangle, démontrer les formules suivantes dues à Néper :

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

7. Démontrer que, si $a, b, c, 2p$, désignent les côtés et le périmètre d'un triangle ABC, et si $2S$ désigne l'expression $A + B + C - \pi$, on a :

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

8. Trouver la distance de deux points A et B situés sur la surface de la terre supposée sphérique, connaissant leurs longitudes et leurs latitudes.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

CHAPITRE III.

FORMULES D'ADDITION, DE SOUSTRACTION, DE MULTIPLICATION ET DE DIVISION DES ARCS.

CHAPITRE IV.

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE V.

TRANSFORMATIONS ET ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VI.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

COMPLÉMENTS.

CHAPITRE I.

QUANTITÉS IMAGINAIRES.

CHAPITRE II.

FORMULES GÉNÉRALES D'ADDITION, DE MULTIPLICATION ET DE DIVISION DES ARCS.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE ET TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS BINÔMES.

CHAPITRE V.

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.
